

الجذور المربعة

I_ الجذر المربع لعدد حقيقي موجب :

(1) - تعريف :

a عدد حقيقي موجب .
الجذر المربع للعدد a هو العدد الحقيقي ايجابي الذي
مربعه a و يكتب : \sqrt{a}

(2) - مثال :

$$\sqrt{9} = 3 \quad ; \quad \sqrt{49} = 7 \quad ; \quad \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \sqrt{\frac{121}{81}} = \frac{11}{9}$$

(ج) -- ملاحظة هامة : $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$

* للحفظ *

$$\begin{aligned} \sqrt{1} = 1 & ; \sqrt{4} = 2 & ; \sqrt{9} = 3 & ; \sqrt{16} = 4 & ; \sqrt{25} = 5 & ; \sqrt{36} = 6 & ; \sqrt{49} = 7 \\ \sqrt{64} = 8 & ; \sqrt{81} = 9 & ; \sqrt{100} = 10 & ; \sqrt{121} = 11 & ; \sqrt{144} = 12 & ; \sqrt{169} = 13 \\ \sqrt{196} = 14 & ; \sqrt{225} = 15 & ; \sqrt{256} = 16 & ; \sqrt{289} = 17 & ; \sqrt{324} = 18 \\ \sqrt{361} = 19 & ; \sqrt{400} = 20 \end{aligned}$$

*/ تمرين تطبيقي :

$$\sqrt{9} \quad ; \quad \sqrt{\frac{25}{9}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} \quad ; \quad \sqrt{0,25} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{25}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{49}}{3} \quad ; \quad \text{بسط ما يلي}$$

*/ الحل :

$$\sqrt{9} = 3 \quad ; \quad \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} \quad ; \quad \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$$

$$\sqrt{0,25} = 0,5 \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} \quad ; \quad \frac{\sqrt{49}}{3} = \frac{7}{3}$$

3) - مربع جذر مربع عدد حقيقي :

ج) -- قاعدة :

a عدد حقيقي .

$$\sqrt{(a)^2} = (\sqrt{a})^2 = a \quad : \quad \text{إذا كان } a > 0 \text{ فإن}$$

$$\sqrt{(a)^2} = (\sqrt{-a})^2 = -a \quad : \quad \text{إذا كان } a < 0 \text{ فإن}$$

ب) -- أمثلة :

$$\sqrt{(-7)^2} = 7 \quad ; \quad \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \quad ; \quad \left(\sqrt{\frac{11}{5}}\right)^2 = \frac{11}{5} \quad ; \quad \sqrt{(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} \quad ; \quad \left(\sqrt{\sqrt{9}}\right)^2 = \sqrt{9} = 3$$

* / تمرين تطبيقي 1 :

بسط ما يلي :

$$\sqrt{\sqrt{16}} \quad ; \quad \sqrt{(3+\sqrt{2})} \quad ; \quad \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}}\right)^2 \quad ; \quad \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{(-5)^2}}}\right)^2 \quad ; \quad \sqrt{7+\sqrt{2^2}} \quad ; \quad \sqrt{(-7-\sqrt{5})^2}$$

* / الحل :

$$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{\sqrt{(4)^2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2 \quad ; \quad \sqrt{(3+\sqrt{2})} = 3+\sqrt{2} \quad ; \quad \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{7}$$

$$\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^2}}}\right)^2 = \sqrt{\sqrt{5^2}} = \sqrt{5} \quad ; \quad \sqrt{7+\sqrt{2^2}} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$$

$$\sqrt{(-7-\sqrt{5})^2} = -(-7-\sqrt{5}) = 7+\sqrt{5}$$

* / تمرين تطبيقي 2 :

بسط ثم أحسب ما يلي :

$$A = \sqrt{25} - \sqrt{3^2} + 2\sqrt{(-11)^2}$$

$$B = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 - \sqrt{(\sqrt{5}+7)^2} - \sqrt{13^2}$$

$$C = \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{10-\sqrt{36}}}}$$

*/الحل :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{25} - \sqrt{3^2} + 2\sqrt{(-11)^2} & ; & & B &= (\sqrt{3+\sqrt{5}})^2 - \sqrt{(\sqrt{5}+7)^2} - \sqrt{13^2} \\ &= 5 - 3 + 2 \times 11 & & & &= 3 + \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 7) - 13 \\ &= 5 - 3 + 22 & & & &= 3 + \cancel{\sqrt{5}} - \cancel{\sqrt{5}} - 7 - 13 \\ &= 24 & & & &= -17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{28 - \sqrt{7 + \sqrt{10 - \sqrt{36}}}} \\ &= \sqrt{28 - \sqrt{7 + \sqrt{10 - 6}}} \\ &= \sqrt{28 - \sqrt{7 + \sqrt{4}}} \\ &= \sqrt{28 - \sqrt{7 + 2}} \\ &= \sqrt{28 - \sqrt{9}} \\ &= \sqrt{28 - 3} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

*/تمرين تطبيقي 3 :

عمل ما يلي :

$$\begin{aligned} a &= 25x^2 - 9 & ; & & b &= 16x^2 - 7 \\ c &= 3x^2 - 4 & ; & & d &= 2x^2 - 5 \end{aligned}$$

*/الحل :

$$\begin{aligned} a &= 25x^2 - 9 & ; & & b &= 16x^2 - 7 \\ &= (5x)^2 - 3^2 & & & &= (4x)^2 - \sqrt{7^2} \\ &= (5x-3)(5x+3) & & & &= (4x-\sqrt{7})(4x+\sqrt{7}) \\ c &= 3x^2 - 4 & ; & & d &= 2x^2 - 5 \\ &= (\sqrt{3}.x)^2 - 2^2 & & & &= (\sqrt{2}.x)^2 - \sqrt{5^2} \\ &= (\sqrt{3}.x-2)(\sqrt{3}.x+2) & & & &= (\sqrt{2}.x-\sqrt{5})(\sqrt{2}.x+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

4- حل المعادلات : $x^2 = a$.

أ) -- إذا كان : $a > 0$ فإن :

المعادلة $x^2 = a$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 - \sqrt{a^2} = 0$$

$$(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$$

$$x - \sqrt{a} = 0 \quad \text{أو} \quad x + \sqrt{a} = 0$$

$$x = -\sqrt{a} \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{a}$$

إذن هذه المعادلة تقبل حلين هما : \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$.

ب) -- إذا كان : $a = 0$ فإن :

المعادلة $x^2 = a$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

إذن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : 0.

ج) -- إذا كان : $a < 0$ فإن :

المعادلة $x^2 = a$ ليس لها حل.

* / تمرين تطبيقي :

حل المعادلات الآتية :

$$-11 + x^2 = -4 \quad ; \quad 2x^2 = 6$$

$$3x^2 + 15 = 3 \quad ; \quad 2(x^2 - 1) = -2$$

* / الحل :

- / المعادلة : $2x^2 = 6$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 = \frac{6}{2}$$

$$x^2 = 3$$

$$x = -\sqrt{3} \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{3}$$

إذن هذه المعادلة تقبل حلين هما : $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$.

/- المعادلة : $-11 + x^2 = -4$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 = -4 + 11$$

$$x^2 = 9$$

$$x = -\sqrt{9} = -3 \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{9} = 3$$

إذن هذه المعادلة تقبل حلين هما : 3 و -3 .

/- المعادلة : $2(x^2 - 1) = -2$ تكافئ على التوالي :

$$2x^2 - 2 = -2$$

$$2x^2 = -2 + 2$$

$$2x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{2}$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

إذن : هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : 0 .

/- المعادلة : $3x^2 + 15 = 3$ تكافئ على التوالي :

$$3x^2 = 3 - 15$$

$$3x^2 = -12$$

$$x^2 = \frac{-12}{3}$$

$$x^2 = -4$$

إذن : هذه المعادلة ليس لها حل.

II - العمليات على الجذور المربعة :

(1) - الجذر المربع و الضرب :

(أ) -- خاصية 1 :

a و b و c و z أعداد حقيقية موجبة.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \dots \times \sqrt{z} = \sqrt{a \times b \times c \times \dots \times z}$$

/* أمثلة :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 6} = \sqrt{12}$$

;

$$\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{3 \times 25} = \sqrt{3} \times \sqrt{25} = \sqrt{3} \times 5 = 5\sqrt{3}$$

;

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 3 \times 5} = \sqrt{30}$$

(ب) -- خاصية 2 :

a و b عددين حقيقيين موجبان.

$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

/* أمثلة :

$$\sqrt{3^2 \times 11} = 3\sqrt{11} \quad ; \quad \sqrt{25 \times 7} = \sqrt{5^2 \times 7} = 5\sqrt{7} \quad ; \quad \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{3^2 \times 7} \times \sqrt{2^2 \times 3} = 3\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} = 3 \times 2 \sqrt{7 \times 3} = 6\sqrt{21}$$

/* تقنيات و مهارات :

(1) - التفكير :

التفكير
180
90
45
15
5
1

لنبسط $\sqrt{180}$: من أجل هذا سنفك 180 .

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

(2) - الجذور المربعة و القوى :

لنبسط و نحسب ما يلي : $A = \sqrt{5^6}$ و $B = \sqrt{7^5}$

$$A = \sqrt{5^6} = (\sqrt{5^3})^2 = 5^3 = 125$$

$$B = \sqrt{7^5} = \sqrt{7^4 \times 7^1} = \sqrt{(7^2)^2 \times 7} = 7^2 \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$$

/* تمرين تطبيقي :

بسّط ثم أحسب ما يلي :

$$a = \sqrt{\sqrt{3^4 \times 5^2 \times 2^7}} \quad ; \quad b = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \quad ; \quad c = (3\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$d = \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9} \quad ; \quad e = \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{34} \quad ; \quad f = \sqrt{3} \times \sqrt{\sqrt{5} + 2} \times \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

/* الحل :

$$a = \sqrt{\sqrt{3^4 \times 5^2 \times 2^7}} = \sqrt{3^2 \times 5^2 \times 2^6 \times 2} = 3 \times 5 \times 2^3 \sqrt{2} = 120\sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$c = (3\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - \sqrt{5}) = (3\sqrt{2})^2 - \sqrt{5^2} = 9 \times 2 - 5 = 18 - 5 = 13$$

$$d = \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9} = 5 + 9 - 2 \times 3 = 5 + 9 - 6 = 8$$

$$\begin{aligned}
e &= \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54} = \sqrt{2^5 \times 3} + 2\sqrt{2^3 \times 3} - 3\sqrt{3^3 \times 2} \\
&= \sqrt{2^4 \times 2 \times 3} + 2\sqrt{2^2 \times 2 \times 3} - 3\sqrt{3^2 \times 3 \times 2} \\
&= \sqrt{2^4 \times 6} + 2\sqrt{2^2 \times 6} - 3\sqrt{3^2 \times 6} \\
&= 2^2 \times \sqrt{6} + 2 \times 2 \times \sqrt{6} - 3 \times 3 \times \sqrt{6} = 4\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 9\sqrt{6} \\
&= (4 + 4 - 9)\sqrt{6} = -\sqrt{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \sqrt{3} \times \sqrt{\sqrt{5} + 2} \times \sqrt{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{3} \times \sqrt{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} = \sqrt{3} \times \sqrt{\sqrt{5}^2 - 2^2} \\
&= \sqrt{3} \times \sqrt{5 - 4} = \sqrt{3} \times \sqrt{1} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

(2) - الجذر اربع و القسمت :
(أ) -- خاصية 1 :

a و b عددان حقيقيان موجبان و $b \neq 0$.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

*/ أمثلة :

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2 \quad ; \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5} \quad ; \quad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{3}$$

(ب) -- خاصية 2 :

a و b عددان حقيقيان و $b \neq 0$.

$$\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b} \quad ; \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

*/ أمثلة :

$$\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4} \quad ; \quad \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad -\sqrt{\frac{1}{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}} = -\frac{\sqrt{11}}{11}$$

$$\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{35}}{5}$$

(3) - إزالت الجذر المربع من المقام :

(أ) -- مثال 1 :

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad ; \quad \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{5\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{6}}{5 \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{10}$$

$$\frac{2 + \sqrt{7}}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}(2 + \sqrt{7})}{3\sqrt{11}^2} = \frac{2 \times \sqrt{11} + \sqrt{11} \times \sqrt{7}}{3 \times 11} = \frac{2\sqrt{11} + \sqrt{77}}{33}$$

(ب) -- مثال 2 : (صيغة المرافق)

$b > 0 \quad \text{و} \quad a > 0$ $\sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ هو } \sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ مرافق} \quad \text{و} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ هو } \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ مرافق}$

$$\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{2}^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{2 - 5} = \frac{3\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{-5}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4 - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}(4 + \sqrt{6})}{(4 - \sqrt{6})(4 + \sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{18}}{4^2 - \sqrt{6}^2} = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{3^2 \times 2}}{16 - 6} = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{10}$$