

نشاط تمهيدي

x و y عددان حقيقيان بحيث

. $x - y = 6$ **1**

. $x > y$ **2**

ليكن x عدداً حقيقياً بحيث $3 < x < \sqrt{3}$. نعتبر التعبير

. أطر التعبير α .

. $\alpha = (x + 1)^2 + 3$ **4**

. نفترض أن $2 < x < 1$ اعط تأطيرا آخر للتعبير α .

. ما هو أدق تأطير من بين التأطيرين السابقين.

I. الترتيب

قاعدة 1

. $a - b \leq 0$ يعني $a \leq b$ x و y عددان حقيقيان :

تطبيق 1

قارن العددين $4+8\sqrt{7}-3$ و $4x(x+1)^2$ ثم قارن $4x$ و $(x+1)^2$ حيث x عدد حقيقي

الحل

لقارن العددين $4x$ و $(x+1)^2$

$$(x+1)^2 - 4x = x^2 + 2x + 1 - 4x$$

$$= x^2 - 2x + 1$$

$$= (x-1)^2$$

لدينا $(x+1)^2 \geq 4x$ فـ $(x-1)^2 \geq 0$ بما أن

لقارن العددين $4+8\sqrt{7}-3$ و $4+8\sqrt{7}$

$$(4+8\sqrt{7}) - (-3+8\sqrt{7}) = 4+8\sqrt{7} + 3 - 8\sqrt{7} = 7$$

$$(4+8\sqrt{7}) - (-3+8\sqrt{7}) > 0$$

لدينا $4+8\sqrt{7} > -3+8\sqrt{7}$ إذن و منه

ملاحظة: لمقارنة عددين حقيقيين يمكن تحديد إشارة فرقهما.

II. الترتيب والعمليات

1 – الترتيب والجمع

خاصية 1

a و b و c أعداد حقيقية.

. $a + c \leq b + c$ يعني $a \leq b$

الحل

تطبيق 2

$$\begin{aligned}x + 2\sqrt{2} &\leq \sqrt{2} && \text{لدينا} \\x + 2\sqrt{2} + (-2\sqrt{2}) &\leq \sqrt{2} + (-2\sqrt{2}) && \text{يكافى} \\x &\leq \sqrt{2} - 2\sqrt{2} && \text{يكافى} \\x &\leq -\sqrt{2} && \text{يكافى} \quad x \leq (1-2)\sqrt{2} && \text{يكافى}\end{aligned}$$

علما أن $x + 2\sqrt{2} \leq \sqrt{2}$
. $x \leq -\sqrt{2}$ بين أن

2 – الترتيب والضرب

خاصية 2

$$\begin{aligned}&a \leq b \quad \text{و } m \text{ و } b \text{ أعداد حقيقية .} \\& \cdot ma \leq mb \quad \text{فإن } m > 0 \text{ و } a \leq b \quad \text{إذا كان} \\& \cdot ma \geq mb \quad \text{فإن } m < 0 \text{ و } a \leq b \quad \text{إذا كان}\end{aligned}$$

حالة خاصة

$-a \geq -b$ عددان حقيقيان. $a \leq b$ يعني a و b

تطبيق 3

$$\begin{aligned}\sqrt{3}a + 2 &\leq \sqrt{3} && \text{لدينا} \\ \sqrt{3}a + 2 + (-2) &\leq \sqrt{3} + (-2) && \text{يكافى} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}a &\leq \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} - 2) && \text{يكافى} \quad \sqrt{3}a \leq \sqrt{3} - 2 \\ a &\leq \frac{(\sqrt{3} - 2)\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} && \text{يكافى} \quad a \leq \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} \\ a &\leq \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} && \text{تكافى} \quad a \leq \frac{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} && \text{يكافى}\end{aligned}$$

a عدد حقيقي معلوم .
إذا علمت أن $\sqrt{3}a + 2 \leq \sqrt{3}$ ،
بين أن $a \leq \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$
(نظيف مقابل 2 أولا ثم نضرب
طرفى المتفاوتة في مقلوب $\sqrt{3}$ في
المرحلة الثانية)

خاصية 3

a و b و x و y أعداد حقيقة موجبة .
إذا كان $a \times x \leq b \times y$ فإن $x \leq y$ و $a \leq b$

تطبيق 4

$$\begin{aligned}&a \text{ و } b \text{ عددان حقيقيان موجبان بحيث } a \leq \sqrt{3} - 1 \text{ و } 3b \leq \sqrt{3} + 1 \\&\text{. } ab \leq \frac{2}{3} \text{ – بين أن } -1 \\&\text{– بين أن } (a + 3b)^2 \leq 12\end{aligned}$$

الحل

لتبين أن $(a + 3b)^2 \leq 12$
 $3b \leq \sqrt{3} + 1$ و $a \leq \sqrt{3} - 1$ لدينا
 $(3b)^2 \leq (\sqrt{3} + 1)^2$ و $a^2 \leq (\sqrt{3} - 1)^2$ إذن
 $(3b)^2 \leq 4 + 2\sqrt{3}$ و $a^2 \leq 4 - 2\sqrt{3}$ يعني
 من جهة أخرى حسب السؤال 1
 $ab \leq \frac{2}{3}$ يعني $6ab \leq 4$ ، نجمع المثلثات الثلاث نحصل على
 $a^2 + 6ab + (3b)^2 \leq 4 + 4 + 4$
 $(a + 3b)^2 \leq 12$ ومنه

لتبين أن $ab \leq \frac{2}{3}$
 $3b \leq \sqrt{3} + 1$ و $a \leq \sqrt{3} - 1$ لدينا
 $3b \times a \leq (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$ إذن
 لأن a و b عدادان حقيقيان موجبان
 $3ab \leq (\sqrt{3})^2 - 1^2$ يكافيء
 $3ab \leq 3 - 1$ يكافيء
 $3ab \leq 2$ يكافيء
 $ab \leq \frac{2}{3}$ و منه $\frac{1}{3} \times 3ab \leq \frac{1}{3} \times 2$ يكافيء

3 – الترتيب والمربيع

خاصية 4

و b عدادان حقيقيان موجبان.
 . $a^2 \leq b^2$ يعني $a \leq b$
 . $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ يعني $a \leq b$

يمكنك البرهان على الخاصية (أدرس إشارة $a^2 - b^2$)

تطبيق 5

قارن العددين $4\sqrt{5}$ و $3\sqrt{7}$

الحل

$(4\sqrt{5})^2 > (3\sqrt{7})^2$ ومنه
 $4\sqrt{5} > 3\sqrt{7}$ وبالتالي

لقارن العددين $4\sqrt{5}$ و $3\sqrt{7}$.
 $(4\sqrt{5})^2 = 4^2 \times (\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$ لدينا
 $(3\sqrt{7})^2 = 3^2 \times (\sqrt{7})^2 = 9 \times 7 = 63$ و

ملاحظة: لمقارنة عددين حقيقيين موجبين يمكن مقارنة مربعيهما.

خاصية 5

و b عدادان حقيقيان موجبان قطعا :
 $\ll \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ يعني $a \leq b \gg$

تطبيق 6

و y عدادان حقيقيان أصغر قطعا من 1 بحيث $2x \leq y$. بين أن x

$\frac{1}{1-2x} \leq \frac{1}{1-y}$ $-2x \geq -y$ $(1-2x) > 0$	لنبين أن يكافى لأن	$2x \leq y$ $1-2x \geq 1-y$ $0 < 1-y < 1-2x$
--	---	--

III. التأطير

تعريف 1

أمثلة . x و a و b أعداد حقيقة.
 - الكتابة $a \leq x \leq b$ تسمى تأطيراً سعته $b-a$ للعدد x .

أمثلة . $1.41 \leq \sqrt{2} \leq 1.42$ تأطيراً للعدد $\sqrt{2}$ سعنته 0.01

. $1.5 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{5}$ تأطيراً للعدد $\sqrt{3}$ سعنته $\sqrt{5} - 1.5$

1 - تأطير مجموع عددين حقيقين .

قاعدة 2

a و b و c و d أعداد حقيقة.

. إذا كان $b \leq c \leq x + y \leq d$ () فإن $c \leq y \leq d$ و $a \leq x \leq b$

تطبيق 7

علماً أن $3 \leq x \leq \sqrt{2}$ و $-1 \leq y \leq -2\sqrt{2}$ - أطر العدد $x+y$

الحل

$$(-2+1)\sqrt{2} \leq x+y \leq 3-1$$

يعني

$$-\sqrt{2} \leq x+y \leq 2$$

يعني

$$-\sqrt{2} \leq x+y \leq 2$$

ومنه

$$x+y \leq 3$$

لؤطر العدد y

$$-2\sqrt{2} \leq y \leq -1$$

لدينا

$$-2\sqrt{2} + \sqrt{2} \leq x+y \leq 3 + (-1)$$

إذن

2 - تأطير فرق عددين حقيقين

قاعدة 3

لتأطير الفرق $y-x$ نؤطر y - ثم نطبق قاعدة الجمع ()

تطبيق 8

علماً أن $3 \leq x \leq 1.5$ و $-1 \leq y \leq -2.6$ - أطر العدد $y-x$.

يجب تأطير مقابل y بالضرب في -1

الحل

$$1.5 + 1 \leq x + (-y) \leq 3 + 2.6 \quad \text{يعني}$$

$$2.5 \leq x - y \leq 5.6 \quad \text{يعني}$$

$$\boxed{2.5 \leq x - y \leq 5.6} \quad \text{و منه}$$

. لنظر العدد $x - y$.

$-2.6 \leq y \leq -1$ و $1.5 \leq x \leq 3$ لدينا

$1 \leq -y \leq 2.6$ و $1.5 \leq x \leq 3$ يعني

3 – تأثير جداء عددين حقيقيين

قاعدة 4

و b و c و d أعداد حقيقة موجبة.

. $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$ فإن $c \leq y \leq d$ و $a \leq x \leq b$

تطبيق 9

علما أن $3 \leq x \leq 1.5$ و $-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4}$ أطر العدد $2xy$.

الحل

$$\frac{1}{4} \leq -y \leq \frac{1}{2} \quad \text{تكافىء}$$

$$\frac{1}{4} \times 1.5 \leq x \times (-y) \leq \frac{1}{2} \times 3 \quad \text{و منه}$$

$$\frac{1.5}{4} \leq -xy \leq \frac{3}{2} \quad \text{يكافىء}$$

$$-\frac{3}{2} \leq xy \leq -\frac{1.5}{4} \quad \text{يكافىء}$$

. لنظر العدد $2xy$

$-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4}$ و $1.5 \leq x \leq 3$ لدينا

يشترط في تأثير جداء عددين حقيقيين أن تكون الأعداد المؤطر بها موجبة

$-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4}$ لدينا

4 – تأثير خارج عددين حقيقيين

قاعدة 5

. ($\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$) ثم نطبق قاعدة الجداء لتأثير الخارج $\frac{x}{y}$ نظر

علما أن $3 \leq x \leq 1.5$ و $-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4}$

تطبيق 10

$$2 \leq -\frac{1}{y} \leq 4 \quad \text{تكافىء}$$

$$2 \times 1.5 \leq x \times \left(-\frac{1}{y}\right) \leq 4 \times 3 \quad \text{و منه}$$

$$3 \leq -\frac{x}{y} \leq 12 \quad \text{يكافىء}$$

$$12 \times (-2) \leq (-2) \times \left(-\frac{x}{y}\right) \leq 3 \times (-2) \quad \text{يكافىء}$$

$$-24 \leq 2 \times \frac{x}{y} \leq -6 \quad \text{يكافىء}$$

. لنظر العدد $2 \times \frac{x}{y}$

$-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4}$ و $1.5 \leq x \leq 3$ لدينا

يشترط في تأثير خارج عددين حقيقيين أن تكون الأعداد المؤطر بها موجبة.

$-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4}$ لدينا

$\frac{1}{4} \leq -y \leq \frac{1}{2}$ تكافىء

5 - تأطير تعبير

مثال

نعتبر العددين x و y بحيث $2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$ و $\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. أطر التعبير

الحل

$2^2 \leq y^2 \leq (2\sqrt{2})^2$ و $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq x^2 \leq (\sqrt{2})^2$ يكافي

$4 \leq y^2 \leq 4 \times 2$ و $\frac{1}{4} \leq x^2 \leq 2$ يكافي

$4 \leq y^2 \leq 8$ و $\frac{1}{4} \leq x^2 \leq 2$ أي

$\frac{1}{4} + 4 \leq x^2 + y^2 \leq 2 + 8$ إذن

$\frac{17}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 10$ يكافي

(2) $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{4}{17}$ يكافي

نضرب أطراف التأطيرين 1 و 2 طرف بطرف

نحصل على

$$\frac{1}{10} \times \frac{9}{2} \leq \frac{x+2y}{x^2+y^2} \leq \frac{4}{17} \times 5\sqrt{2}$$

$$\frac{9}{20} \leq \frac{x+2y}{x^2+y^2} \leq \frac{20\sqrt{2}}{17} \quad \text{ومنه}$$

لنظر التعبير $\frac{x+2y}{x^2+y^2}$

- لنظر $x+2y$

لدينا $2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$

يكافي $2 \times 2 \leq 2 \times y \leq 2 \times 2\sqrt{2}$

يكافي $4 \leq 2y \leq 4\sqrt{2}$

وبما أن $\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

فإن $\frac{1}{2} + 4 \leq x + 2y \leq \sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

يكافي $\frac{9}{2} \leq x + 2y \leq 5\sqrt{2}$

- لنظر $\frac{1}{x^2+y^2}$

لدينا $2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$ و $\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

IV. المحسبة والقيمة المطلقة

مثال : باستعمال المحسبة نتوصل إلى أن $\sqrt{15} \approx 3.872982.....$

القيمة 3.872982 تسمى قيمة مقربة للعدد $\sqrt{15}$.

ويمكن كذلك تأطير العدد $\sqrt{15}$ بواسطة عددين عشرين .

مثال 1 : $3.87 \leq \sqrt{15} \leq 3.88$ يسمى تأطيرا للعدد $\sqrt{15}$ سعته 0.01.

- القيمة 3.88 تسمى قيمة مقربة يافراط للعدد $\sqrt{15}$ إلى 10^{-2} .

- القيمة 3.87 تسمى قيمة مقربة بتفريط للعدد $\sqrt{15}$ إلى 10^{-2} .

مثال 2 : $3.872 \leq \sqrt{15} \leq 3.873$ يسمى تأطيرا للعدد $\sqrt{15}$ سعته 0.001.

- القيمة 3.873 تسمى قيمة مقربة يافراط للعدد $\sqrt{15}$ إلى 10^{-3} .

- القيمة 3.872 تسمى قيمة مقربة بتفريط للعدد $\sqrt{15}$ إلى 10^{-3} .