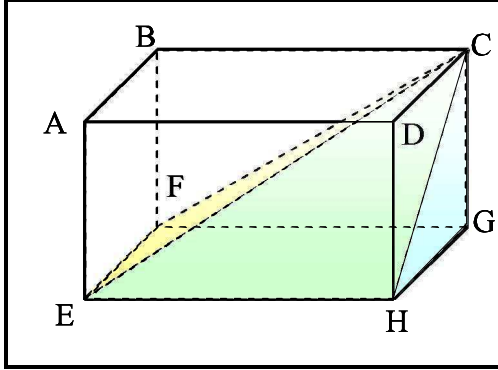


سلسلة تمارين

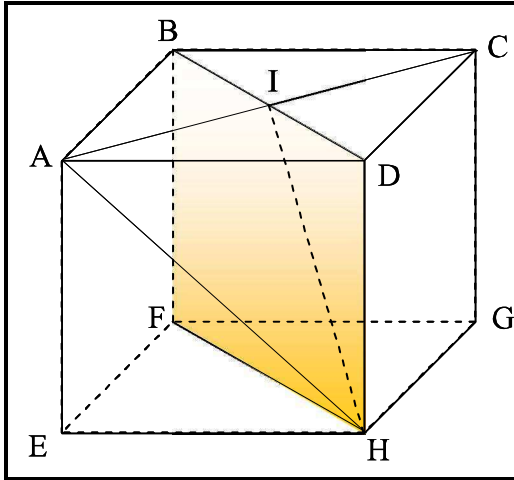
تمرين 1



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم حيث:
 $AE = 4$ و $AD = 6$ و $AB = 3$

- 1- احسب BD و CH و BG
- 2- أ- بين أن $(BF) \perp (BD)$
 ب- احسب DF
- 3- احسب حجم $ABCDEFGH$
- 4- احسب حجم الهرم $CEFGH$

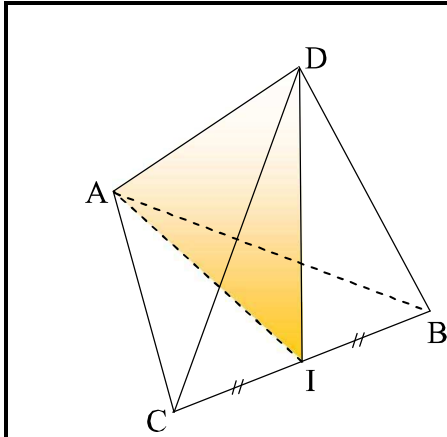
تمرين 2



$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه $a = 4$ و I مركز المربع $ABCD$

- 1- احسب AI و AC و AH
- 2- أ- بين أن $(DH) \perp (ID)$
 ب- احسب IH
- 3- باستعمال مبرهنة فيثاغورس العكسية ، بين أن $(AI) \perp (IH)$
- 4- استنتج أن : $(AI) \perp (FBDH)$
- 5- احسب V_1 حجم المكعب $ABCDEFGH$
- 6- احسب V_2 حجم رباعي الأوجه $AIDH$ بطريقتين
- 7- تحقق أن : $V_1 = 12V_2$

تمرين 3



$ABCD$ رباعي أوجه منتظم طول حرفه $a = 4$
 (أي $AB = BC = AC = AD = DC = DB = 4$)

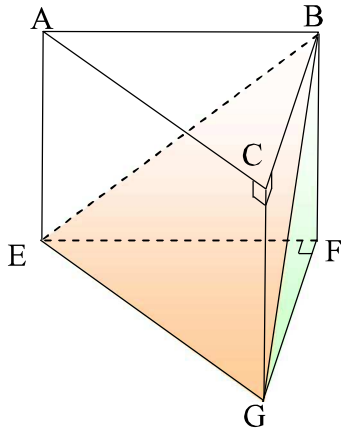
و I منتصف $[BC]$

- 1- أ- بين أن $(DI) \perp (BC)$ ثم احسب DI
 ب- احسب AI ثم حدد طبيعة المثلث AID
- 2- بين أن $(BC) \perp (ADI)$
- 3- لتكن J منتصف $[AD]$
 أ- احسب IJ
 ب- احسب مساحة المثلث AID
- 4- احسب V_1 حجم رباعي الأوجه $CAID$
- 5- استنتج V حجم رباعي الأوجه المنتظم $ABCD$

سؤال للبحث :

مستعينا بخطوات التمرين ، بين أنه إذا كان طول حرف رباعي أوجه منتظم $ABCD$ هو a ، فإن حجمه هو : $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

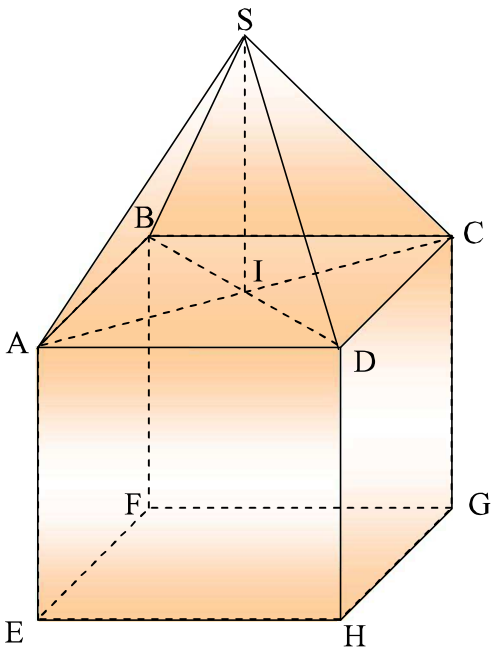
تمرين 4



$ABCEFG$ موشور قائم قاعدته عبارة عن مثلث قائم الزاوية في F
نعطي: $BF = 4$ و $FG = 3$ و $EF = 4$

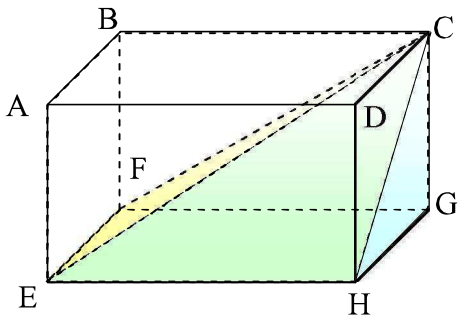

- 1- احسب حجم $ABCEFG$
- 2- احسب حجم رباعي الأوجه $BEFG$
- 3- استنتج حجم الهرم $BAEGC$
- 4- أ- احسب مساحة المستطيل $ACGE$
ب- استنتج قيمة h ارتفاع الهرم $BAEGC$

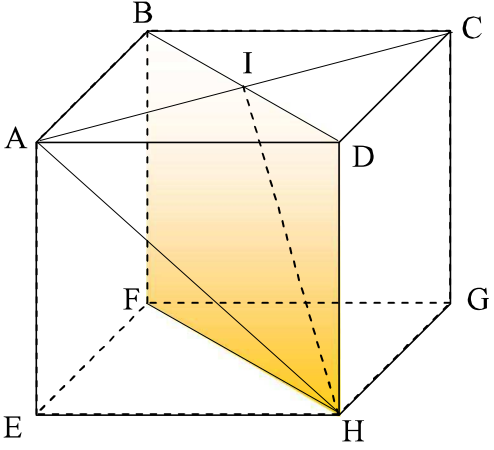
تمرين 5



يمثل الشكل جانبه تصميمًا مصغرا لمنزل خشبي، مركب من مكعب
 $ABCDEFGH$ طول حرفه $AB = 3\text{cm}$ وهرم $SABCD$ مربع القاعدة
ارتفاعه $SI = 4\text{cm}$

- 1- احسب حجم هذا الجسم
- 2- إذا علمت أن نسبة التصغير هي $k = \frac{1}{200}$ فاحسب الحجم الحقيقي للمنزل بالمترا مكعب.

<p>معطيات : $AE = 4$ و $AD = 6$ و $AB = 3$</p>	<p>1- لنحسب BD و CH و BG لدينا ABD مثلث قائم الزاوية في A ، إذن حسب مبرهنة $BD^2 = AB^2 + AD^2$</p>
	$BD^2 = 3^2 + 6^2$ $BD^2 = 9 + 36$ فيتاغورس المباشرة : $BD^2 = 45$ $BD = \sqrt{45}$
<p>لدينا BGC مثلث قائم الزاوية في C ، إذن حسب مبرهنة $BG^2 = BC^2 + CG^2$ $BG^2 = 6^2 + 4^2$ $BG^2 = 36 + 16$ فيتاغورس المباشرة : $BG^2 = 52$ $BG = \sqrt{52}$</p>	<p>لدينا DCH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة $CH^2 = DC^2 + DH^2$ $CH^2 = 3^2 + 4^2$ $CH^2 = 9 + 16$ فيتاغورس المباشرة : $CH^2 = 25$ $CH = 5$</p>
<p>ب- لنحسب DF</p>	<p>2- أ- لنبين أن $(BF) \perp (BD)$</p>
<p>لدينا حسب السؤال السابق BDF مثلث قائم الزاوية في B ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة : $DF^2 = BF^2 + BD^2$ $DF^2 = 4^2 + (\sqrt{45})^2$ $DF^2 = 16 + 45$ $DF^2 = 61$ $DF = \sqrt{61}$</p>	<p>لدينا $ABFE$ مستطيل ، إذن : $(BF) \perp (AB)$ ولدينا $BCGF$ مستطيل ، إذن : $(BF) \perp (BC)$ وبما أن (AB) و (BC) متقاطعان و يحددان المستوى $(ABCD)$ ، فإن : $(BF) \perp (ABCD)$ و حيث أن (BD) ضمن المستوى $(ABCD)$ فإن : $(BF) \perp (BD)$</p>
<p>4- لنحسب حجم الهرم $CEFGH$</p>	<p>3- لنحسب حجم $ABCDEFGH$</p>
<p>هرم $CEFGH$ قاعدته هي المستطيل $EFGH$ و ارتفاعه CG ، إذن حجمه : $V' = \frac{1}{3} \times CG \times S_{EFGH}$ $V' = \frac{1}{3} \times CG \times (EF \times EH)$ $V' = \frac{1}{3} \times 4 \times (3 \times 6)$ $V' = \frac{72}{3} = 24$</p>	<p>$ABCDEFHG$ متوازي مستطيلات قائم، حجمه : $V = AB \times AD \times AE$ $V = 3 \times 6 \times 4$ $V = 72$</p>
<p>← لاحظ أن الزوايا القائمة الحقيقية ليست ظاهرة في التمثيل ، هذا يعني أنه يتوجب استحضار الشكل الحقيقي لمتوازي المستطيلات القائم للعثور على هذه الزوايا. </p>	

<p>معطيات : $AB = AD = AE = a = 4$</p>	<p>1- لنحسب AC و AI و AH</p>
	<p>لدينا ADC مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة $AC^2 = AD^2 + DC^2$ $AC^2 = 4^2 + 4^2$ $AC^2 = 16 + 16$ فيتاغورس المباشرة : $AC^2 = 32$ $AC = \sqrt{32}$ و بما أن I منتصف $[AC]$ فإن : $AI = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2}$ لدينا ADH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة $AH^2 = AD^2 + DH^2$ $AH^2 = 4^2 + 4^2$ $AH^2 = 16 + 16$ فيتاغورس المباشرة : $AH^2 = 32$ $AH = \sqrt{32}$</p>
<p>← يستحسن تبسيط $AH = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$ مما يسمح أيضا بتبسيط $AI = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ، لكنه ليس إلزاميا.</p>	<p>2- أ- لنبين أن $(DH) \perp (ID)$</p>
<p>ب- احسب IH</p> <p>لدينا حسب السؤال السابق IDH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة : $IH^2 = ID^2 + DH^2$ $IH^2 = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 + 4^2$ $IH^2 = \frac{32}{4} + 16$ $IH^2 = 8 + 16$ $IH^2 = 24$ $IH = \sqrt{24}$</p>	<p>لدينا $ADHE$ مستطيل ، إذن : $(DH) \perp (AD)$ ولدينا $DCGH$ مستطيل ، إذن : $(DH) \perp (DC)$ و بما أن (AD) و (DC) متقاطعان و يحددان المستوى $(ABCD)$ ، فإن : $(DH) \perp (ABCD)$ و حيث أن (ID) ضمن المستوى $(ABCD)$ فإن : $(DH) \perp (ID)$</p>
<p>4- لنبين أن : $(AI) \perp (FBDH)$</p>	<p>3- لبين أن $(AI) \perp (IH)$</p>
<p>لدينا $ABCD$ مربع ، إذن قطراه متعامدان ، منه $(AI) \perp (BD)$ ، و لدينا حسب السؤال السابق : $(AI) \perp (IH)$ ، و بما أن (BD) و (IH) متقاطعان و يحددان المستوى $(FBDH)$ ، فإن : $(AI) \perp (FBDH)$</p>	<p>لدينا $AI^2 + IH^2 = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 + (\sqrt{24})^2$ $AH^2 = (\sqrt{32})^2$ و $AI^2 + IH^2 = \frac{32}{4} + 24$ $AH^2 = 32$ $AI^2 + IH^2 = 8 + 24$ $AI^2 + IH^2 = 32$ إذن : $AI^2 + IH^2 = AH^2$ ، بالتالي حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث AIH قائم الزاوية في النقطة I ، أي $(AI) \perp (IH)$</p>
<p>5- لنحسب V_1 حجم المكعب $ABCDEFGH$</p>	
<p>$V_1 = a^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$</p>	

تمرين 2

انتبه ← تعليق

-6- لنحسب V_2 حجم رباعي الأوجه $AIDH$ بطريقتين

الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
بما أن $(DH) \perp (ABCD)$ ، فإنه يمكن اعتبار $AIDH$ هرمًا قاعدته المثلث AID وارتفاعه DH ، منه : $V_2 = \frac{1}{3} \times DH \times S_{AID}$ $V_2 = \frac{1}{3} \times DH \times \frac{AI \times ID}{2}$ $V_2 = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{\frac{\sqrt{32}}{2} \times \frac{\sqrt{32}}{2}}{2}$ $V_2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{2} = \frac{4 \times 8}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$	بما أن $(AI) \perp (FBDH)$ ، فإنه يمكن اعتبار $AIDH$ هرمًا قاعدته المثلث IDH وارتفاعه AI ، منه : $V_2 = \frac{1}{3} \times AI \times S_{IDH}$ $V_2 = \frac{1}{3} \times AI \times \frac{ID \times DH}{2}$ $V_2 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{32}}{2} \times \frac{\frac{\sqrt{32}}{2} \times 4}{2}$ $V_2 = \frac{\sqrt{32}}{6} \times \frac{2\sqrt{32}}{2} = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{32}}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

← باستعمال التبسيط المشار إليه سابقًا يمكن الحصول على النتيجة بسهولة

-7- تحقق أن : $V_1 = 12V_2$

لدينا : $12V_2 = 12 \times \frac{16}{3} = \frac{192}{3} = 64$ ، إذن : $V_1 = 12V_2$

تمرين 3

انتبه ← تعليق

1- أ- بين أن $(DI) \perp (BC)$ ثم احسب DI

لدينا DBC مثلث متساوي الأضلاع و I منتصف $[BC]$ ، إذن (DI) يمثل ارتفاعًا للمثلث DBC ، منه $(DI) \perp (BC)$
 لدينا DIC مثلث قائم الزاوية في I ، إذن حسب مبرهنة

$$DC^2 = CI^2 + DI^2$$

$$4^2 = 2^2 + DI^2$$

$$16 = 4 + DI^2$$

$$16 - 4 = DI^2$$

$$12 = DI^2$$

$$DI = \sqrt{12}$$

فيثاغورس المباشرة :

ب- احسب AI ثم حدد طبيعة المثلث AID

لدينا ABC مثلث متساوي الأضلاع و I منتصف $[BC]$ ،

إذن (AI) يمثل ارتفاعًا للمثلث ABC ، منه $(AI) \perp (BC)$

لدينا DIC مثلث قائم الزاوية في I ، إذن حسب مبرهنة

فيثاغورس المباشرة :

$$AC^2 = CI^2 + AI^2$$

$$4^2 = 2^2 + AI^2$$

$$16 = 4 + AI^2$$

$$16 - 4 = AI^2$$

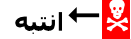
$$12 = AI^2$$

$$AI = \sqrt{12}$$

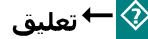
إذن $AI = DI$ منه AID مثلث

متساوي الساقين في النقطة I

تمرين 3



انتبه

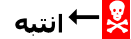


تعليق

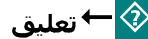
	<p>3- أ- لنحسب IJ</p> <p>لدينا حسب السؤال 1-ب AID مثلث متساوي الساقين في النقطة I، و J منتصف $[AD]$، إذن: $(IJ) \perp (AD)$ يمثل ارتفاعا للمثلث ADI، منه $(IJ) \perp (AD)$ لدينا AIJ مثلث قائم الزاوية في J، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة</p> $AI^2 = AJ^2 + IJ^2$ $(\sqrt{12})^2 = 2^2 + IJ^2$ $12 = 4 + IJ^2$ $12 - 4 = IJ^2$ $8 = IJ^2$ $IJ = \sqrt{8}$	<p>2- بين أن $(BC) \perp (ADI)$</p> <p>لدينا حسب ما سبق $(BC) \perp (ID)$ و $(BC) \perp (IA)$ وبما أن (ID) و (IA) متقاطعان يحددان المستوى (ADI)، فإن: $(BC) \perp (ADI)$</p> <p>3- ب- لنحسب مساحة المثلث AID</p> $S_{AID} = \frac{AD \times IJ}{2}$ $S_{AID} = \frac{4 \times \sqrt{8}}{2}$ $S_{AID} = 2\sqrt{8}$
<p>5- لنحسب حجم رباعي الأوجه $ABCD$</p> $V = 2V_1$ $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$	<p>4- لنحسب حجم رباعي الأوجه $CAID$</p> <p>لدينا حسب السؤال 2: $(BC) \perp (ADI)$، إذن: يمكن اعتبار $CAID$ هرما قاعدته المثلث AID و ارتفاعه CI، منه:</p> $V_1 = \frac{1}{3} \times CI \times S_{AID}$ $V_1 = \frac{1}{3} \times 2 \times 2\sqrt{8} = \frac{4\sqrt{8}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$	<p>4- لنحسب حجم الموشور القائم $ABCEFG$</p> $V_1 = BF \times S_{EFG}$ $V_1 = BF \times \frac{EF \times FG}{2}$ $V_1 = 4 \times \frac{4 \times 3}{2} = 4 \times 6 = 24$ <p>3- لنستنتج حجم الهرم $BAEGC$</p> $V = V_1 - V_2$ $V = 24 - 8$ $V = 16$ <p>4- أ- لنحسب مساحة المستطيل $ACGE$</p> <p>لنحسب أولا AC، لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في B، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة:</p> $AC^2 = AB^2 + BC^2$ $AC = 5 \text{ منه } AC^2 = 4^2 + 3^2$ $AC^2 = 16 + 9 = 25$ <p>إذن $S_{ACGE} = AC \times CG = 4 \times 5 = 20$</p>

← مستعينا بخطوات التمرين، يمكنك أن تبرهن أنه إذا كان طول حرف رباعي أوجه منتظم $ABCD$ هو a ، فإن حجمه هو: $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

تمرين 4

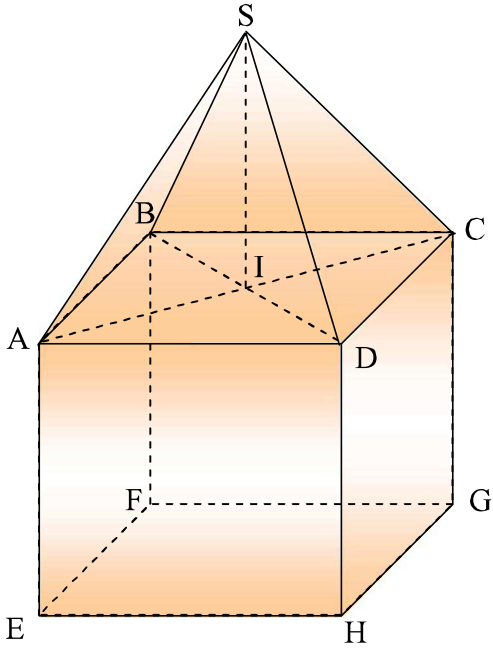


انتبه



تعليق

<p>معطيات:</p> <p>$BF = 4$ و $FG = 3$ و $EF = 4$</p>	<p>2- لنحسب حجم رباعي الأوجه $BEFG$</p> $V_2 = \frac{1}{3} \times BF \times S_{EFG}$ $V_2 = \frac{1}{3} \times 24$ $V_2 = 8$	<p>1- لنحسب حجم الموشور القائم $ABCEFG$</p> $V_1 = BF \times S_{EFG}$ $V_1 = BF \times \frac{EF \times FG}{2}$ $V_1 = 4 \times \frac{4 \times 3}{2} = 4 \times 6 = 24$
	<p>4- ب- لنحسب ارتفاع الهرم $BAEGC$</p> <p>باعتبار أن $BAEGC$ هرم قاعدته $EACG$ و ارتفاعه h فإن:</p> $V = \frac{1}{3} \times h \times S_{ACGE}$ <p>و لدينا حسب ما سبق $V = 16$</p> $\frac{1}{3} \times h \times 20 = 16$ <p>إذن: $\frac{20h}{3} = 16$ منه:</p> $h = \frac{16 \times 3}{20} = \frac{48}{20} = \frac{12}{5}$ <p>بالتالي:</p>	<p>3- لنستنتج حجم الهرم $BAEGC$</p> $V = V_1 - V_2$ $V = 24 - 8$ $V = 16$ <p>4- أ- لنحسب مساحة المستطيل $ACGE$</p> <p>لنحسب أولا AC، لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في B، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة:</p> $AC^2 = AB^2 + BC^2$ $AC = 5 \text{ منه } AC^2 = 4^2 + 3^2$ $AC^2 = 16 + 9 = 25$ <p>إذن $S_{ACGE} = AC \times CG = 4 \times 5 = 20$</p>
<p>← لاحظ أن بعض المجسمات يمكن حساب حجمها بطرق مختلفة، لكونها إما جزءا من مجسمات أخرى أو لكونها تحتوي على أكثر من قاعدة و ارتفاع، و هذا يكون مفيدا في حساب بعض المسافات.</p>		

معطيات : $SI = 4\text{ cm}$ و $AB = 3\text{ cm}$ 

1- لنحسب حجم هذا الجسم

المجسم يتكون من مكعب و هرم مربع القاعدة.

$$V_1 = AB^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ cm}^3 \quad \text{حجم المكعب هو :}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \times SI \times S_{ABCD}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \times SI \times AB^2 \quad \text{و حجم الهرم } SABCD \text{ هو :}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 \times 3$$

$$V_2 = 12 \text{ cm}^3$$

بالتالي حجم هذا الجسم هو :

$$V = V_1 + V_2 = 27 + 12 = 39 \text{ cm}^3$$

2- لنحسب الحجم الحقيقي للمنزل بالمتري مكعب.

$$V' = 200^3 \times V$$

$$V' = 200 \times 200 \times 200 \times 39 \text{ cm}^3$$

$$V' = 312000000 \text{ cm}^3$$

$$V' = 312 \text{ m}^3$$

$$1000000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ m}^3 \quad \text{لأن :}$$

الحجم الحقيقي هو :