

## الدرس الرابع

# اللحد تجذب

ملخص درس

- أعداد حقيقية :

- إذا كان  $a \leq b$  و  $k > 0$  فإن  $ka \leq kb$

- إذا كان  $a \leq b$  و  $k < 0$  فإن  $kb \leq ka$

-  $a$  و  $b$  عددين حقيقين موجبان :

$$a^2 \leq b^2 \quad \text{تكافئ} \quad a \leq b$$

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \quad \text{تكافئ} \quad a < b$$

-  $a$  و  $b$  عددين حقيقين :

$$a - b \leq 0 \quad \text{تكافئ} \quad a \leq b$$

تحذير هام :

من أجل أن تؤطر مربع عدد  $a^2$  أو مقلوب عدد  $\frac{1}{a}$  يجب عليك قبل ذلك معرفة إشارته

التمارين :

التمرين الأول:

$$k > 0 \quad \text{و} \quad 0 < a < b \quad \text{ليكن}$$

$$(1) \quad \frac{a}{b} < \frac{1+ka}{1+kb} \quad \text{بين أن}$$

- إذا كان :

- إذا كان :  $0 < k < a < k'$

و  $0 < m < b < m'$

- إذا كان  $k < a < k'$

$$km < ab < k'm' \quad \longleftrightarrow$$

$$km < ab < k'm' \quad \longleftrightarrow$$

$$km < ab < k'm' \quad \longleftrightarrow$$

$$a - b \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b$$

$$\frac{a}{b} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a < b$$

- إذا كان  $a$  و  $b$  عددين موجبين قطعاً فإن :

- إذا كان  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقة فإن :

### التمرين الخامس :

$$A = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

ليكن

$$B = \frac{6 + \sqrt{3}}{11}$$

1- بسط العدد A

2- بين أن :

$$B - A = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{66}$$

B < A

3- بين أن

### التمرين السادس :

$$b = \frac{2x+3}{x+2} \quad \text{و} \quad a = \frac{2x+5}{x+3}$$

ل يكن  $x \in \mathbb{R}^+$  : تضع

$$b = 2 - \frac{1}{x+2} \quad \text{و} \quad a = 2 - \frac{1}{x+3}$$

1- بين أن

2- استنتاج أن :

### التمرين الثاني :

$$0 < b < 3 \quad \text{و} \quad -1 < a < 1$$

ليكن

$$-3 < ab < 3$$

بين أن

### التمرين الثالث :

$$-1 < a < 2$$

ليكن

$$-1 < a^2 + a < 6$$

بين أن

### التمرين الرابع :

ليكن  $a$  و  $b$  عدداً حقيقياً بحيث :

$$a + b = -3$$

$$-2 < a < 1$$

$$-4 < b < -1$$

1- بين أن

2- أطراً الأعداد التالية :

$$\frac{a+3}{5-b} \quad \text{و} \quad \frac{1}{a-2} \quad \text{و} \quad a^2$$

التمرين السابع :

$$(20 > 10\sqrt{2}) \quad \frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{23}{16}$$

2- استنتج أن

التمرين العاشر :

$$a = x + \frac{1}{x} \quad -2 \leq y \leq -1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{ليكن}$$

1- أعط 3 تأطير للعدد  $a^2$

$$\frac{\sqrt{55}}{3} \leq a \leq \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

2- بين أن :

$$-\frac{13}{3} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq -\frac{13}{4}$$

3- بين أن :

$$1 - \sqrt{3} < c < \frac{-\sqrt{2}}{4} \quad 1 + \sqrt{3} < a < 2\sqrt{2} \quad 1 < b < \sqrt{3} \quad -2 < d < -1$$

1- بين أن  $b < a$

$$ad < \frac{a}{c} \quad ad < \frac{c}{a}$$

التمرين الثامن :

$$\text{ليكن } -2 \leq y \leq -6 \quad \text{و}$$

أوجد تأطيرا للأعداد التالية

$$y^2 - 1 \quad \text{و} \quad x + y$$

التمرين التاسع :

1- بين أن  $a \in \mathbb{R}^+$   $\text{علمًا أن}$

$$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

-	- يوم في الشهر	- يوم في الشهر	- يوم في الشهر	الإسطاعة - البحث من الآن عن الوسائل المشروعة للكسب عبر الأنترنيت
-	- يوم كل 15 يوما	- يوم كل 15 يوما	- كل ليلة	- تذكر نفسى بالأهداف المسيطرة في المخطط - محاسبة النفس يوميا قبل النوم
-	- كل يوم	- كل يوم	- كلمات يجب تذكرها	- التفاعل، الرغبة، العزيمة، الصبر، الإصرار
-				الجانب النفسي

## المخطط السنوي

هذا الجدول عبارة عن نموذج لمخطط سنوي يمكنك تعديل أو تغيير محتواه حسب احتياجاتك و حاجاتك .

ال مجالات	الأهداف	بدء الإنجاز	نهاية الإنجاز	حصيلة ما أنجز
الجانب الديني	- حفظ 10 أحزاب - صوم 6 من شوال - قيام ليلة واحدة على أقل في الأسبوع - كفالة يتيم مساعدة مادية أو معنوية	- 1 أكتوبر 2006 - شهر شوال - طيلة العام	- 30 سبتمبر 2007 - طيلة العام	-
الجانب الدراسي	- النجاح بمعدل عالي - إتقان اللغة الفرنسية - تعلم كيفية البحث عن المعلومات - تعلم التقديم للدروس و الفرض	- 15 سبتمبر 2006 - 15 سبتمبر 2007 - طيلة السنة - طيلة السنة	- 30 يونيو 2007 - طيلة السنة	-
الجانب الثقافي العلمي	- المطالعة بالعربية و الفرنسية - المراسلات و الحورات مع الأشخاص - تعلم كيفية ترتيب الأفكار و طرحها عند النقاش - تعلم الرسم	- 15 سبتمبر 2006 - طيلة السنة - طيلة السنة - من 1 بوليوэр 15 سبتمبر	- 15 سبتمبر 2007 - طيلة السنة	-
الجانب الرياضي والترفيهي	- لعب رياضة جماعية كرة سلة أو قدم - رياضة المشي خلال الصباح الباكر - ممارسة السباحة - الذهاب إلى المخيم - المشاركة في مسرحية من إنجاز دار الشباب - رحلات لاستكشاف جمال الطبيعة	- كل يوم أحد - كل يوم - فصل الصيف - من 1 غشت 15 غشت - أيام العطل - يوم واحد كل شهر	- كل يوم أحد - كل يوم - فصل الصيف - أيام العطل - أيام العطل - يوم واحد كل شهر	-
الجانب المادي المالي	- تعلم التجارة و كيفية بيع سلعة معينة - إدخار قدر معين حسب	- أيام العطل - كل شهر	- أيام العطل - كل شهر	-

## حل تمارين الترتيب

### حل التمرين الأول:

في العلاقة (1) نضرب طرفا بطرف

$$a(1 + k b) < b(1 + k a)$$

يعني أن

$$a + a k b < b + k a b$$

إذن

$$a < b$$

نقوم بهذا لنصل إلى شيء في المعطيات

ثم نبدأ لدينا

إذن  $a < b \leq k < 0$

نضيف  $a k b$  عند طرفي :

$$a + a k b < b + a k b$$

$$a(1 + k b) < b(1 + k a)$$

$$\frac{a(1 + k b)}{b} < 1 + k a$$

$$\frac{a}{b} < \frac{1 + k a}{1 + k b}$$

### حل التمرين الثالث:

$$-1 < a < 2$$

ليكن احذر لا يمكنك تأطير عدد مربع  $a^2$  دون معرفة إشارته

لذلك تتبع التأطير حسب الحالات:

## a<sup>2</sup> - تطير

$$0 < -a < 2$$

$\leq$

$$-2 < a < 0$$

إذن

$$0 < -a \times a < 4$$

$$(1) \boxed{0 < a^2 < 4}$$

$$(2) \boxed{0 < a^2 < 1}$$

- إذا كان  $0 < a < 1$  فإن:

و بالتالي حسب (1) و (2) لدينا :

$$0 < a^2 < 1 < 4$$

$$\boxed{0 < a^2 < 4}$$

إذن :

## $\frac{a+3}{5-b}$ - تطير

$$1 < a + 3 <$$
 لدينا

$$1 < -b < 4$$
 و

$$6 < 5 - b < 9$$

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{5-b} < \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{9} < \frac{a+3}{5-b} < \frac{4}{6}$$

$$0 < -a < 1$$

فإن

-1 < a < 0

ثم

$$0 < -a \times -a < 1$$

بضرب أطراف العلاقتين يعني

$$0 < a^2 < 4$$

$$0 < a < 2$$

- إذا كان

$$(1) \quad -1 < a^2 + a < 1$$

(1) و (2) نستنتج أن: حسب العلاقتين

$$-1 < 0 < a^2 + a < 1 < 6$$

$$\boxed{-1 < a^2 + a < 6}$$

إذن

حل التمرين الرابع:

$$b = -3 - a \quad -1 \text{ لدينا :}$$

لدينا

$$-2 < a < 1$$

إذن

$$-1 < -a < 2$$

يعني

$$-4 < -3 - a < -1$$

$$-4 < b < -1$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3}{9 - 3}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

$$B - A = \frac{6 + \sqrt{3}}{11} - \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

-2

$$= \frac{36 + 6\sqrt{3} - 33 - 11\sqrt{3}}{66}$$

$$= \frac{3 - 5\sqrt{3}}{66}$$

$$B - A = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{66}$$

- لدينا

من أجل أن نبين أن  $B > A$  يكفي أن يكون

$$\begin{cases} \frac{3 - 5\sqrt{3}}{66} < 0 \\ 3 - 5\sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

يعني

أو

$$3 < 5\sqrt{3}$$

أو

إذن يكفي أن نبين أن  $3 < 5\sqrt{3}$

$$3^2 < (5\sqrt{3})^2$$

نرفع إلى المربع :

وهذا في الهاشم

$$\frac{1}{9} < \frac{a+3}{5-b} < \frac{2}{3}$$

$$- \text{تأطير } \frac{1}{a-2}$$

$$\text{احذر لا يمكن تأطير } \frac{1}{a-2} \text{ دون معرفة إشارة } a-2$$

$$-2 < a < 1$$

$$-4 < a-2 < -1$$

احذر لا يمكن قلب عدد داخل التأطير إلا إذا كان موجب

$$1 < -(a-2) < 4$$

$$\frac{1}{4} < \frac{+1}{-(a-2)} < 1$$

$$\frac{1}{4} < \frac{-1}{a-2} < 1$$

$$-1 < \frac{1}{a-2} < \frac{-1}{4}$$

حل التمرين الخامس:

$$A = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}$$

- لدينا

$$= \frac{2x + 3}{x + 2}$$

$$= b$$

$$a - b = 2 - \frac{1}{x+3} - 2 + \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{-x - 2 + x + 3}{(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{(x+3)(x+2)}$$

$$x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0$$

لدينا

$$x + 3 > 0$$

إذن:

$$a - b > 0$$

لدينا

إذن:

لدينا

$$a > b$$

لدينا

لدينا

لدينا

و منه فإن:

$$1 - \frac{b}{a} < 1 \quad \text{يكتفى أن نبين أن } b < a$$

$$\text{و بالتالي يجب تأطير العدد } \frac{b}{a}$$

$$1 + \sqrt{3} < a < 2\sqrt{2}$$

لدينا

$$9 < 25 \times 3$$

$$9 < 75$$

$$9 < 75$$

$$3^2 < 5^2 \times 3$$

$$\sqrt{3^2} < \sqrt{5^2 \times 3}$$

$$3 < 5\sqrt{3}$$

$$3 - 5\sqrt{3} < 0$$

$$B < A \quad \text{إذن} \quad B - A < 0 \quad \text{و بالتالي}$$

حل التمرين السادس:

$$2 - \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3) - 1}{x+3}$$

$$= \frac{2x + 6 - 1}{x+3}$$

$$= \frac{2x + 5}{x+3}$$

$$= a$$

$$2 - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+3) - 1}{x+2}$$

لدينا

يعني

لدينا:

يعني

إذن

يعني

إذن

حل التمرين السابع:

حل التمرين السابع:

$$1 - \frac{b}{a} < 1 \quad \text{يكتفى أن نبين أن } b < a$$

$$\text{و بالتالي يجب تأطير العدد } \frac{b}{a}$$

$$1 + \sqrt{3} < a < 2\sqrt{2}$$

لدينا

$$(2) \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} < \frac{c}{a} < \frac{-1}{8}$$

إذن:

تأطير  $\frac{a}{c}$  من خلال التأطير (2)

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{a} < \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

لدينا

$$-8 < \frac{a}{c} < \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

تطير a × b

$$-2 < b < -1$$

$$1 < -b < 2$$

$$1 + \sqrt{3} < a < 2\sqrt{2}$$

إذن:

$$1 + \sqrt{3} < -ab < 4$$

إذن :

$$-4 < ab < -1 - \sqrt{3}$$

و بالتالي

$$-4 \leq y \leq 3$$

و

$$-6 \leq x \leq -2$$

حل التمرين الثامن :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{a} < \frac{1}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{b}{a} < \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} < 1 + \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} < 1$$

$$b < a$$

و بالتالي

$$\frac{b}{a} < \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

2- تأطير للعددين  $\frac{a}{c}$  و  $\frac{c}{a}$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{a} < \frac{1}{1 + \sqrt{3}}$$

$$1 - \sqrt{3} < c < \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

لدينا c عدد سالب: حذار من تأطير جداء عدد سالب × عدد موجب

$$\frac{\sqrt{2}}{4} < -c < \sqrt{3} - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) < -c \times \frac{1}{a} < \sqrt{3} - 1 \times \frac{1}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{8} < \frac{-c}{a} < \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

إذن

إذن

من جهة أخرى لدينا

إذن

إذن:

لدينا c عدد سالب:

إذن

### حل التمرين التاسع:

$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad -1 \text{ بين أن}$$

من أجل ذلك نبين أن :

$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \times \frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{(\sqrt{a+1})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{a+1-a}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} < \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

إذن يكفي أن نبين أن

$$(1) 2\sqrt{a} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a} < 2\sqrt{a+1}$$

يكافئ

$$a < a+1$$

لدينا

$$\sqrt{a} < \sqrt{a+1}$$

إذن

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a+1}$$

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a} < 2\sqrt{a+1}$$

$$-10 \leq x + y \leq 1$$

احذر أن تأطر عددا مربعا دون أن يكون موجبا

$$0 \leq -y \leq 4 \quad \text{فإن} \quad -4 \leq y \leq 0 \quad - \text{ إذا كان}$$

$$0 \leq -yx - y \leq 16 \quad \text{إذن}$$

$$0 \leq y^2 \leq 16$$

$$(1) \quad -1 \leq y^2 - 1 \leq 15$$

$$0 \leq y \leq 3 \quad - \text{ إذا كان}$$

$$(2) \quad 0 \leq y^2 \leq 9$$

$$-1 \leq y^2 - 1 \leq 8$$

حسب (1) و (2) فإن

$$-1 \leq y^2 - 1 \leq 8 \leq 15$$

$$-1 \leq y^2 - 1 \leq 15$$

و وبالتالي

$$\frac{1}{8} < 3 - 2\sqrt{2} < \frac{1}{4} \quad \leftarrow \quad a = 1$$

نوع

$$-\frac{23}{8} < -2\sqrt{2} < -\frac{11}{4}$$

$$-\frac{23}{16} < 2\sqrt{2} < -\frac{11}{8}$$

$$\frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{23}{16}$$

حل التمرين العاشر :

$$a = x + \frac{1}{x}$$

لدينا

$$a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x \times \frac{1}{x}$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

لدينا

$$\frac{1}{9} \leq x^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$4 \leq \frac{1}{x^2} \leq 9$$

و

من جهة أخرى لدينا

$$a < a + 1$$

إذن

$$\sqrt{a} < \sqrt{a + 1}$$

إذن

$$\sqrt{a} - \sqrt{a} < \sqrt{a + 1} + \sqrt{a}$$

يعني

$$2\sqrt{a} < \sqrt{a + 1} + \sqrt{a}$$

و بالتالي

$$2\sqrt{a} < \sqrt{a + 1} + \sqrt{a} < 2\sqrt{a + 1}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a + 1}} < \frac{1}{\sqrt{a + 1} + \sqrt{a}} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

-2 إذا عوضنا  $a = 1$  في التأطير الأول :

$$\frac{1}{2\sqrt{a + 1}} < \sqrt{a + 1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

نرفع التأطير

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{a + 1}}\right)^2 < (\sqrt{a + 1} - \sqrt{a})^2 < \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2$$

إلى المربع

$$\frac{1}{4(a + 1)} < a + 1 - 2\sqrt{a(a + 1)} + a < \frac{1}{4a}$$

$$\frac{1}{4(a + 1)} < 2a + 1 - 2\sqrt{a(a + 1)} < \frac{1}{4a}$$

$$-\frac{13}{3} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq -\frac{13}{4}$$

من (1) و (2)

$$\frac{1}{9} + 4 + 2 \leq x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \leq \frac{1}{4} + 9 + 2$$

إذن

$$\frac{55}{9} \leq a^2 \leq \frac{45}{4}$$

$$\sqrt{\frac{55}{9}} \leq \sqrt{a^2} \leq \sqrt{\frac{45}{4}}$$

لدينا -2

$$\frac{\sqrt{55}}{3} \leq a \leq \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$[45 = 5 \times 3^2 ; \sqrt{45} = \sqrt{5} \times 3]$$

$$-1 \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{2} \quad \text{إذن} \quad -2 \leq y \leq -1 \quad \text{لدينا -3}$$

$$\frac{1}{3} \times -1 \leq x \times \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}$$

يعني

$$(1) \quad \boxed{-\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{4}}$$

$$2 \leq \frac{1}{x} \leq 3$$

$$-2 \leq y \leq -1$$

$$(2) \quad \boxed{-4 \leq \frac{x}{y} \leq -3}$$

إذن