

التمرين الثاني :

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A

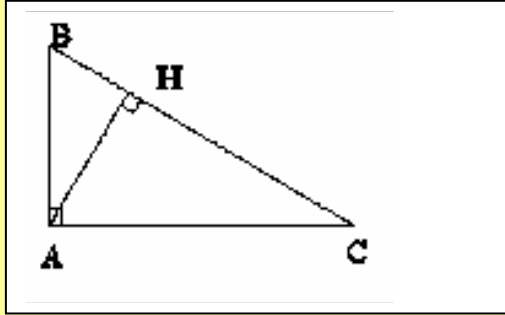
بحيث $AB = 9$ و $AC = 12$

1- حدد مساحة المثلث ABC

2- أحسب AH

3- نضع $BH = x$

حدد x لكي تكون للمثلثين ABH و AHC نفس المساحة



التمرين الثالث :

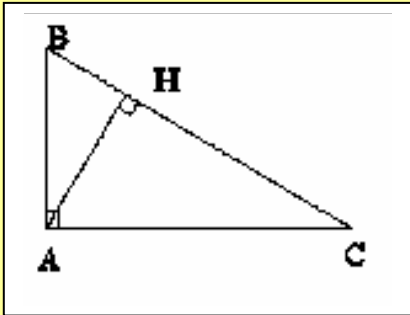
ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A

و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

1- بين أن : $AB \times AC = AH \times BC$

2- بين أن : $AB^2 = BH \times BC$

$AC^2 = CH \times BC$



الدرس العاشر

مبرهنة فيثاغورس

ملخص الدرس

مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

إذا كان مثلث قائم الزاوية فإن مربع وتره يساوي مجموع مربعي ضلعيه الآخرين

مبرهنة فيثاغورس العكسية :

إذا كان مجموع مربعي ضلعي في مثلث يساوي مربع طول الضلع الثالث فإن المثلث قائم

الزاوية

التمارين :

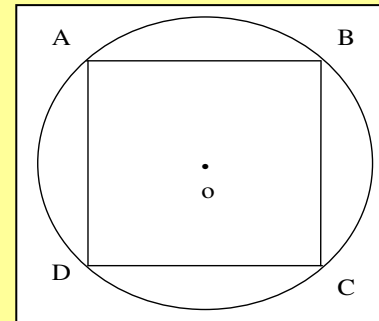
التمرين الأول :

ليكن $ABCD$ مربعا محاطا بدائرة مركزها O و شعاعها $r = 8 \text{ cm}$

1- أحسب AB

2- ليكن H المسقط العمودي ل O على $[AB]$ حدد OH

3- حدد مساحة $ABCD$



استنشق هواء نقياً مفعماً
بالأفكار الإيجابية و البناءة

الانسان

الانسان

أخرج و تحرر من الأفكار
السلبية بهواء زفير

3- بين أن : $AH^2 = BH \times CH$

4- بين أن : $BH^2 + CH^2 + 2 AH^2 = BC^2$

5- بين أن : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

التمرين الرابع :

ليكن EFG مثلثاً بحيث $GF = 4$ و $EF = 2\sqrt{3}$

1- أحسب EG لكي يكون المثلث EFG قائم الزاوية في E

2- أحسب ارتفاعه EH

3- أحسب FH

التمرين الخامس :

ليكن ABC مثلثاً قائم الزاوية في A

و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

المنصف الداخلي للزاوية $\hat{B}AC$ يقطع (BC) في I

و K هي المسقط العمودي للنقطة I على (AB)

1- بين أن : $KI = KA$

2- بين أن : $\frac{1}{KI} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$

3- استنتج أن : $AI = \sqrt{2} AC \times \frac{AB}{AC + AB}$

$$\frac{oA \times oB}{2} = \frac{oH \times AB}{2}$$

إذن

$$oH = \frac{oA \times oB}{AB} = \frac{64}{8\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$oH = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$S_{ABCD} = a^2 = AB^2 = (8\sqrt{2})^2 = 128 \text{ cm}^2$$

-3

حل التمرين الثاني:

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$$

إذن : قائمة الزاوية في A

$$= \frac{9 \times 12}{2}$$

$$= 54$$

2- لدينا $S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2}$ و الذي هو تعبير ثاني لمساحة مثلث

$$AH = \frac{2 S_{ABC}}{BC}$$

إذن

من جهة ثانية حسب مبرهنة فيثاغورس في المثلث ABC

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

لدينا

حل تمارين مبرهنة فيثاغورس

حل التمرين الأول:

1- حساب AB

لدينا [AC] قطر في الدائرة إذن المثلث ABC قائم الزاوية في B

حسب مبرهنة فيثاغورس $AB^2 + BC^2 = AC^2$

بما أن ABCD مربع فإن $AC = AB = BC$ إذن $2 AB^2 = AC^2$

$$AB^2 = \frac{AC^2}{2}$$

و منه فإن

$$AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2r$$

$$= r\sqrt{2}$$

$$= 8\sqrt{2}$$

$$AB = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

إذن

2- مساحة المثلث oAB تكتب على شكلين

$$S = \frac{oA \times oB}{2}$$

و من جهة أخرى لدينا

$$S = \frac{oH \times AB}{2}$$

$$2 HB = BC$$

$$HB = \frac{BC}{2}$$

$$x = HB = \frac{BC}{2} = \frac{15}{2}$$

إذن

حل التمرين الثالث

1- مساحة مثلث قائم الزاوية مع H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

نكتب على شكلين

$$S = \frac{AH \times BC}{2} \quad \text{و} \quad S = \frac{AB \times AC}{2}$$

$$\frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2}$$

و بالتالي

$$AH \times BC = AB \times AC$$

إذن

2- حسب مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم الزاوية ABC

ABH قائم في H :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

ACH قائم في H

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$AB^2 = BC^2 - AC^2$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$

يعني

$$AH = \frac{2 S_{ABC}}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$$

و بالتالي

$$= \frac{2 \times 54}{\sqrt{144 + 81}}$$

$$AH = \frac{108}{\sqrt{225}}$$

$$= \frac{108}{15}$$

$$= \frac{36}{5}$$

$$S_{ABH} = \frac{AH \times HB}{2}$$

-3

$$S_{AHC} = \frac{AH \times HC}{2}$$

للمثلثين ABH و AHC نفس المساحة إذن :

$$\frac{AH \times HB}{2} = \frac{AH \times HC}{2}$$

$$(1) HB = HC$$

بما أن $HC = BC - HB$ فإن :

العلاقة (1) تصبح

$$HB = BC - HB$$

$$AH^2 = BH \times CH$$

-4

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (1)$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

ABH قائم في H إذن

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

ACH قائم في H إذن

ثم نعوض في (1)

$$BC^2 = AH^2 + BH^2 + AH^2 + CH^2$$

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 + 2 AH^2$$

-5

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{AB^2 \times AC^2}$$

نوحّد المقام :

$$= \frac{BC^2}{(BH \times BC) \times (CH \times BC)}$$

حسب السؤال (2)

$$= \frac{BC^2}{BH \times CH \times BC^2}$$

حسب السؤال (3)

$$= \frac{1}{BH \times CH}$$

$$= (BH + HC) - AC^2$$

$$= BH^2 + 2 BH \times HC + HC^2 - AC^2$$

$$= BH^2 + 2 BH \times (BC - BH) + (AC^2 - AH^2) - AC^2$$

$$= BH^2 + 2 BH \times BC - 2 BH^2 - AH^2$$

$$- AH^2 = BH^2 - AB^2$$

ولدينا

$$AB^2 = 2 BH \times BC - BH^2 + BH^2 - AB^2$$

$$2 AB^2 = 2 BH \times BC$$

و بالتالي

$$AB^2 = BH \times BC$$

إذن

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$= BC^2 - BH \times BC$$

$$= BC (BC - BH)$$

$$= BC \times CH$$

3- لدينا حسب السؤال (1)

$$AB \times AC = AH \times BC$$

$$AH^2 = \frac{AB^2 \times AC^2}{BC^2}$$

يعني

$$= \frac{(BH \times BC) \times (BC \times CH)}{BC^2}$$

$$= BH \times \frac{CH \times BC^2}{BC^2}$$

$$EH = \frac{EF \times EG}{2}$$

و بالتالي

$$= \frac{2\sqrt{3} \times 2}{4}$$

$$= \sqrt{3}$$

3- حساب FH

في المثلث EFH القائم الزاوية في H لدينا

$$EH^2 + HF^2 = EF^2$$

$$HF^2 = EF^2 - EH^2$$

إذن

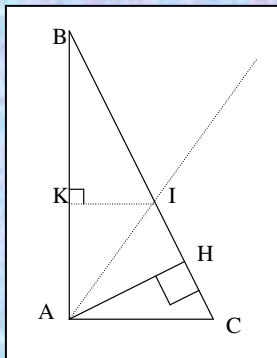
$$HF = \sqrt{EF^2 - EH^2}$$

$$= \sqrt{12 - 3}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$= 3$$

حل التمرين الخامس:



-1

لدينا K المسقط العمودي ل I على (AB)

إذن (KI) عمودي على (AB)

و لدينا (AC) عمودي على (AB)

و بالتالي : (KI) // (AC)

$$= \frac{1}{AH^2}$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

حل التمرين الرابع:

1- EFG قائم الزاوية في E إذن :

$$EF^2 + EG^2 = FG^2$$

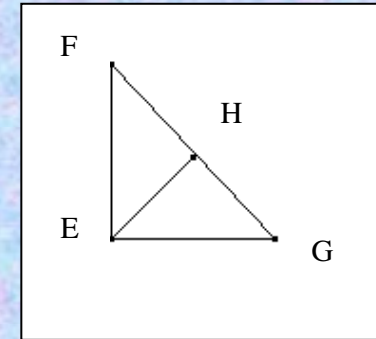
$$EG^2 = FG^2 - EF^2$$

$$EG = \sqrt{FG^2 - EF^2}$$

$$= \sqrt{16 - 12}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$



2- حساب EH :

$$S = \frac{EH \times FG}{2}$$

$$S = \frac{EF \times EG}{2}$$

تعريف آخر للمساحة

$$\frac{EH \times FG}{2} = \frac{EF \times EG}{2}$$

إذن

$$KI + \frac{KI \times AC}{AB} = AC$$

إذن

$$KI \left(1 + \frac{AC}{AB}\right) = AC$$

$$KI \left(\frac{AB + AC}{AB}\right) = AC$$

يعني

$$KI = \frac{AC \times AB}{AB + AC}$$

$$\frac{1}{KI} = \frac{AB + AC}{AC \times AB}$$

إذن

$$= \frac{AB}{AC \times AB} + \frac{AC}{AC \times AB}$$

$$= \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$$

$$\boxed{\frac{1}{KI} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}}$$

3- لدينا

$$AI^2 = AK^2 + KI^2$$
$$= 2 AK^2$$

$$AI = \sqrt{2} AK$$

إذن

$$\frac{1}{KI} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$$

و حسب السؤال (2) لدينا

$$\begin{cases} \hat{K}IA = \hat{I}AC \\ \hat{K}AI = \hat{I}AC \end{cases}$$

إذن الزاويتان

من جهة أخرى لدينا

$$\hat{K}IA = \hat{K}AI$$

إذن :

هاتان زاويتان في المثلث KIA إذن المثلث KIA متساوي الساقين

$$KI = KA$$

و بالتالي

$$2- \text{ نبين أن } \frac{1}{KA} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$$

لدينا $(AC) \parallel (KI)$ حسب مبرهنة طاليس المباشرة

$$\frac{BK}{BA} = \frac{BI}{BC} = \frac{KI}{AC}$$

لدينا

$$KI = \frac{BK \times AC}{BA}$$

$$= \frac{(AB - AK) \times AC}{AB}$$

$$= \frac{AB \times AC - AK \times AC}{AB}$$

$$= AC - \frac{AK \times AC}{AB}$$

لدينا حسب السؤال (1) $AK = KI$