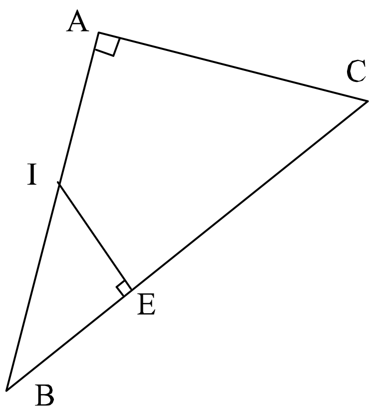
الحساب المثلثي-حلول

تمرين 1 — انتبه ← — تعليق ←



① لنحسب BC ثم $Cos(A\hat{B}C)$

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$ منه $BC = \sqrt{100} = 10\,cm$

منه : $Cos(A\hat{B}C) = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

② لنحسب $Cos(A\hat{B}C)$ بطريقة أخرى ثم نحسب EB

لدينا في المثلث القائم الزاوية : IEB $Cos(A\hat{B}C) = \frac{BE}{BI}$

نستنتج إذن حسب السؤال السابق أن : $\frac{BE}{BI} = \frac{4}{5}$ أي : $\frac{BE}{4} = \frac{4}{5}$

($BI = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$ لأن I منتصف $[AB]$) بالتالي : $BE = \frac{4 \times 4}{5} = \frac{16}{5}$

③ لنحسب EC و IE

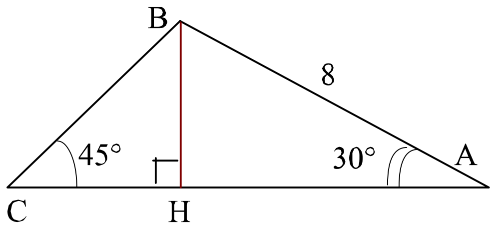
لدينا : $EC = BC - BE = 10 - \frac{16}{5} = \frac{50-16}{5} = \frac{34}{5}$

لحساب IE نحسب $Sin(A\hat{B}C)$ بطريقتين : لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC : $Sin(A\hat{B}C) = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

لدينا في المثلث القائم الزاوية IEB : $Sin(A\hat{B}C) = \frac{IE}{BI}$ منه : $\frac{IE}{BI} = \frac{3}{5}$ أي : $\frac{IE}{4} = \frac{3}{5}$ بالتالي : $IE = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$

← يمكن استعمال مبرهنة فيتاغورس المباشرة أيضا لحساب IE .

تمرين 2 — انتبه ← — تعليق ←



① لنحسب AH

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH : $Cos(H\hat{A}B) = \frac{AH}{AB}$

و بما أن : $H\hat{A}B = 30°$ و نحن نعلم أن : $Cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

فإن : $\frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أي : $\frac{AH}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ بالتالي : $AH = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

② لنحسب BH

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH : $Sins(H\hat{A}B) = \frac{BH}{AB}$

و بما أن : $H\hat{A}B = 30°$ و نحن نعلم أن : $Sin(30°) = \frac{1}{2}$

فإن : $\frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$ أي : $\frac{BH}{8} = \frac{1}{2}$ بالتالي : $BH = \frac{8}{2} = 4$

③ لنحسب BC

لدينا في المثلث القائم الزاوية BCH : $Sins(B\hat{C}H) = \frac{BH}{BC}$

و بما أن : $B\hat{C}H = 45°$ و نحن نعلم أن : $Sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

فإن : $\frac{BH}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أي : $\frac{4}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

بالتالي : $BC = \frac{2 \times 4}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \times \sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

④ لنحسب CH

لدينا في المثلث BCH : $C\hat{B}H = 180° - (45° + 90°) = 45°$

إذن فهو متساوي الساقين و منه : $CH = BH = 4$

⑤ لنحسب AC

لدينا : $AC = CH + AH = 4 + 4\sqrt{3}$

R

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

معطيات : $\sin(\alpha)=\frac{3}{5}$

② لنحسب $Tan(\alpha)$	① لنحسب $Cos(\alpha)$
نعلم أن : $Tan(\alpha)=\frac{Sin(\alpha)}{Cos(\alpha)}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$	نعلم أن : $Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)=1$ إذن : $Cos^2(\alpha)+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$ منه : $Cos^2(\alpha)+\frac{9}{25}=1$ منه : $Cos^2(\alpha)=1-\frac{9}{25}=\frac{25-9}{25}=\frac{16}{25}$ و حيث أننا نعلم أن : $Cos(\alpha)>0$ فإن : $Cos(\alpha)=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

معطيات : $Tan(\beta)=\frac{\sqrt{5}}{2}$

① لنحسب $Sin(\alpha)$ و $Cos(\alpha)$

نعلم أن : $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ إذن : $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ منه $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{5}}=\frac{\cos\alpha}{2}$ منه $\frac{(\sin\alpha)^2}{5}=\frac{(\cos\alpha)^2}{4}$

منه $\frac{1}{9}=\frac{(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2}{5+4}=\frac{(\cos\alpha)^2}{4}=\frac{(\sin\alpha)^2}{5}$ ، نستنتج إذن أن :

$\frac{1}{9}=\frac{(\sin\alpha)^2}{5}$ منه $(\sin\alpha)^2=\frac{5}{9}$ و بالتالي $\sin\alpha=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$	و	$\frac{1}{9}=\frac{(\cos\alpha)^2}{4}$ منه $(\cos\alpha)^2=\frac{4}{9}$ و بالتالي $\cos\alpha=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

← هناك طرق أخرى لحساب $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$. لاحظ أن هذه الطريقة تعتمد على قواعد التناسب و قواعد النسب المثلثية.

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

① لنبسط :

$$A=(Cos(\alpha)+Sin(\alpha))^2+(Cos(\alpha)-Sin(\alpha))^2=Cos^2(\alpha)+2\times Cos(\alpha)\times Sin(\alpha)+Sin^2(\alpha)+Cos^2(\alpha)-2\times Cos(\alpha)\times Sin(\alpha)+Sin^2(\alpha)$$

$$A=Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)+Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)=1+1=2$$

$$B=\frac{Sin^4(\alpha)-Cos^4(\alpha)}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}=\frac{(Sin^2(\alpha)-Cos^2(\alpha))\times(Sin^2(\alpha)+Cos^2(\alpha))}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}=\frac{Sin^2(\alpha)-Cos^2(\alpha)}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}=\frac{(Sin(\alpha)-Cos(\alpha))\times(Sin(\alpha)+Cos(\alpha))}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}$$

$$B=Sin(\alpha)-Cos(\alpha)$$

$$C=Cos(17°)+3\cos^2(20°)+Sin^2(60°)-\sin(73°)+3Cos^2(70°)+\frac{1}{\tan^2(30°)}$$

$$C=Cos(17°)+3\cos^2(20°)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-Cos(17°)+3Sin^2(20°)+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$C=Cos(17°)-Cos(17°)+3(\cos^2(20°)+\sin^2(20°))+\frac{3}{4}+\frac{1}{\frac{3}{9}}$$

$$C=\quad 0 \quad +3\times 1 \quad +\frac{3}{4}+\frac{9}{3}=3+\frac{3}{4}+3=6+\frac{3}{4}=\frac{24+3}{4}=\frac{27}{4}$$

← لاحظ أن التبسيط اعتمد على تطبيق الخاصية $Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)=1$ و على المتطابقات الهامة.

R

تمرين 6   انتبه ←   تعليق ←

معطيات : $2\sin(x)-\tan(x)=0$ و $0<x<90°$

① لنحدد قيمة x

لدينا : $2\sin(x)-\tan(x)=0$ منه : $2\sin(x)-\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=0$ منه : $\sin(x)\left(2-\dfrac{1}{\cos(x)}\right)=0$

إذن : $\sin(x)=0$ أو $2-\dfrac{1}{\cos(x)}=0$ ، و لكن لدينا حسب المعطيات $0<x<90°$ أي أن $\sin(x)>0$

إذن : $2-\dfrac{1}{\cos(x)}=0$ منه : $2=\dfrac{1}{\cos(x)}$ منه : $2\cos(x)=1$ منه : $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$

و بالتالي : $x=60°$

← لاحظ أن إيجاد العدد x يعتمد على إيجاد إحدى نسبه المثلثية ثم استعمال جدول قيم النسب المثلثية الخاصية لتحديد قيمته.

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵔⵓ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء الكبرى
نيابة المحمدية

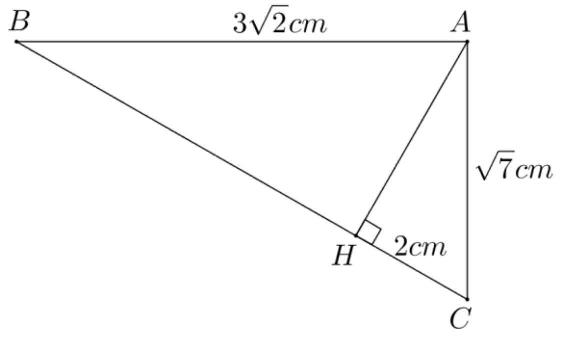
تمارين

مبرهنة فيتاغورس + الحساب المثلثي

المستـــــوى : الثالثـة ثانـوي إعـــدادي

من إعداد الأستاذ : المهـــــدي عنيـــس

❀ تمرين ①:

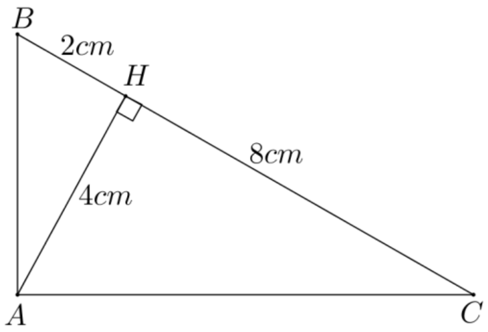


نعتبر الشكل جانبه :

بحيث : H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

أحسب : AH ثم BH.

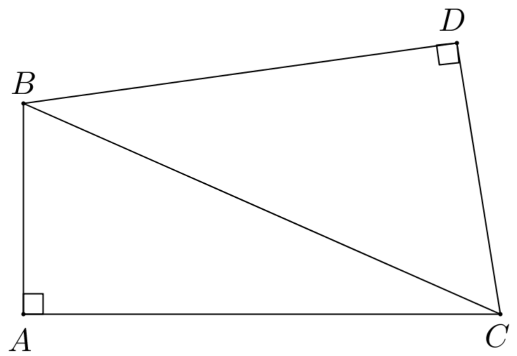
❀ تمرين ②:



نعتبر الشكل جانبه :

أثبت ان المثلث ABC قائم الزاوية.

❀ تمرين ③:



نعتبر الشكل جانبه :

أثبت أن : $AB^2 + AC^2 = DB^2 + DC^2$

❀ تمرين ④:

ABC مثلث بحيث : $AB = 6\ cm$ و $AC = 8\ cm$ و $BC = 10\ cm$.

1) – أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية.

2) – أحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{B}C$.

3) – أرسم الشكل ثم أنشئ H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

4) – أحسب : AH ثم CH.

❀ تمرين ⑤:

α قياس زاوية حادة بحيث : $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

1) – بسط ما يلي :

$$A = \cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) - \sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) \quad \text{و} \quad B = \frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha} - \frac{2}{\cos^2\alpha}$$

$$C = (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 \quad \text{و} \quad D = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha$$

$$E = \sin\alpha \times \sqrt{1-\cos\alpha} \times \sqrt{1+co\alpha} + \cos^2\alpha \quad \text{و} \quad F = \sqrt{2}\sin^2\alpha + 2\sin 45^\circ \cos^2\alpha$$

2) – بين أن :

$$\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad \text{و} \quad \sqrt{1-\sin\alpha} \times \sqrt{1+\sin\alpha} = \cos\alpha$$

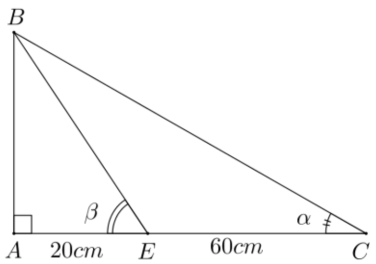
$$\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad \text{و} \quad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

3) – نفترض أن : $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

أ) -- أحسب : $\cos\alpha$ ثم $\tan\alpha$.

ب) -- إستنتج حساب : $\sin(90^\circ - \alpha)$ و $\cos(90^\circ - \alpha)$ و $\tan(90^\circ - \alpha)$.

❀ تمرين ⑥:



نعتبر الشكل جانبه بحيث : $\alpha + \beta = 90^\circ$.

$AE = 20\ cm$ و $EC = 60$. أحسب : AB.

❀ تمرين ⑦:

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : $BC = 15\ cm$ و $\sin A\hat{B}C = \frac{3}{5}$.

1) – أحسب : $\cos A\hat{B}C$ و $\tan A\hat{B}C$.

2) – أحسب : AB ثم AC.

❀ تمرين ⑧:

أحسب ما يلي :

$$A = 2\cos 15^\circ + \cos^2 36^\circ - 2\sin 75^\circ + \cos^2 54^\circ$$

$$B = \cos^2 28^\circ - \sin^2 51^\circ + \cos^2 62^\circ + \cos^2 39^\circ$$

$$C = \tan 73^\circ \times \tan 17^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ$$