

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2019
- الموضوع -



المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

NS24

4	مدة الانجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين 3 يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل.....(10 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها
لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين 1: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة، صفرها المصفوفة المنعدمة $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ليكن $*$ قانون التركيب الداخلي المعرف في \mathbb{C} بما يلي:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) ; (x + yi) * (a + bi) = xa + (x^2b + a^2y)i$$

1- (أ) بين أن القانون $*$ تبادلي في \mathbb{C} 0.25

(ب) بين أن القانون $*$ تجميعي في \mathbb{C} 0.5

(ج) بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا e يتم تحديده. 0.25

(د) ليكن $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. بين أن العدد العقدي $x + yi$ يقبل العدد العقدي $\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i$ مماثلا له بالنسبة للقانون $*$ 0.25

2- نعتبر المجموعة الجزئية E للمجموعة \mathbb{C} المعرفة بما يلي: $E = \{x + yi / x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R}\}$

(أ) بين أن E مستقر بالنسبة للقانون $*$ في \mathbb{C} 0.25

(ب) بين أن $(E, *)$ زمرة تبادلية. 0.5

3- نعتبر المجموعة الجزئية G للمجموعة E المعرفة بما يلي: $G = \{1 + yi / y \in \mathbb{R}\}$ 0.5

بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(E, *)$

4- نعتبر المجموعة $F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R} \right\}$

(أ) بين أن F مستقر بالنسبة للقانون \times في $M_2(\mathbb{R})$ 0.25

(ب) ليكن φ التطبيق من E نحو F الذي يربط كل عدد عقدي $x + yi$ من E بالمصفوفة $M(x^2, y) = \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$ 0.5

من F . بين أن φ تشكل تقابلي من $(E, *)$ نحو (F, \times)

(ج) استنتج أن (F, \times) زمرة تبادلية. 0.25

التمرين 2: (3.5 نقطة)

ليكن m عددا عقديا غير حقيقي ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$)

I- نعتبر في \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول z المعرفة بما يلي: $(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$

1- (أ) بين أن مميز المعادلة (E) غير منعدم. 0.25

(ب) حدد z_1 و z_2 ، حل المعادلة (E) 0.5

2- نفترض في هذا السؤال أن $m = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$

(أ) حدد معيار و عمدة للعدد $z_1 + z_2$ 0.5

(ب) بين أنه إذا كان $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ فإن $z_1 + z_2 = 2i$ 0.25

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط التالية:

A النقطة ذات اللحق $a = 1 + i$ ، B النقطة ذات اللحق $b = (1 + i)m$ ، C النقطة ذات اللحق $c = 1 - i$ ،

D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و Ω منتصف القطعة [CD].

(أ-1) بين أن لحن النقطة Ω هو $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$ 0.5

(ب) احسب $\frac{b-a}{\omega}$ 0.25

(ج) استنتج أن $(O\Omega) \perp (AB)$ و أن $AB = 2O\Omega$ 0.5

2- المستقيم $(O\Omega)$ يقطع المستقيم (AB) في النقطة H ذات اللحق h

(أ) بين أن $\frac{h-a}{b-a}$ عدد حقيقي وأن $\frac{h}{b-a}$ عدد تخيلي صرف . 0.5

(ب) استنتج h بدلالة m 0.25

التمرين 3: (3 نقط)

نقبل أن 2969 (السنة الأمازيغية الحالية) عدد أولي.

ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين بحيث: [2969] $n^8 + m^8 \equiv 0$

1- نفترض في هذا السؤال أن 2969 لا يقسم n

(أ) باستعمال مبرهنة بوزو (BEZOUT)، بين أن: [2969] $(\exists u \in \mathbb{Z}); u \times n \equiv 1$ 0.5

(ب) استنتج أن: [2969] $(u \times m)^8 \equiv -1$ و أن: [2969] $(u \times m)^{2968} \equiv -1$ (لاحظ أن: $2968 = 8 \times 371$) 0.5

(ج) بين أن 2969 لا يقسم $u \times m$ 0.5

(د) استنتج أنه لدينا أيضا: [2969] $(u \times m)^{2968} \equiv 1$ 0.5

2- (أ) باستعمال النتائج السابقة، بين أن 2969 يقسم n 0.5

(ب) بين أن: [2969] $m \equiv 0$ و [2969] $n \equiv 0$ \Leftrightarrow [2969] $n^8 + m^8 \equiv 0$ 0.5

التمرين 4: (10 نقط)

الجزء I: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f(x) = 4x \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right)$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 0.5

2- (أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، وأن: $f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ 0.5

(ب) ادرس تغيرات الدالة f على \mathbb{R} ، ثم ضع جدول تغيراتها. 0.75

(ج) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $\left] \frac{3}{2}, 2 \right[$ بحيث: $f(\alpha) = 0$ (نأخذ: $e^{\frac{3}{2}} = 4,5$) 0.5

(د) تحقق أن: $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ 0.25

3- (أ) بتطبيق مبرهنة رول على الدالة f' ، بين أنه يوجد عدد حقيقي x_0 من المجال $]0, 1[$ بحيث: $f''(x_0) = 0$ 0.5

(ب) بتطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة f'' ، بين أنه، لكل عدد حقيقي x يخالف x_0 من المجال $[0, 1]$ ، 0.5

$$\text{لدينا: } \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$$

(ج) استنتج أن $I(x_0, f(x_0))$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C) 0.25

4- (أ) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) 0.5

(ب) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ 0.5

(نأخذ: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$ و $f(1) = -0.5$ و غير مطلوب إنشاء النقطة I)

5- (أ) تحقق أن: $f(x) \leq 0$; $(\forall x \in]-\infty, \alpha])$ 0.25

(ب) بين أن: $\int_0^\alpha f(x) dx = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 3)}{3}$ ، ثم استنتج أن: $\frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$ 0.75

(ج) أحسب، بدلالة α و بوحدة cm^2 ، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمت التي 0.5

معادلاتها على التوالي: $x = \alpha$ و $x = 0$ و $y = 0$

الجزء II: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) + u_n \quad \text{و} \quad u_0 < \alpha$$

- 0.5 1-أ) بين بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < \alpha$ (استعمل السؤال 5-أ) من الجزء I)
- 0.25 ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية.
- 2- نفترض أن $0 \leq u_0$ ونضع: $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$
- 0.5 أ) بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) > 0$ (نأخذ: $\ln 2 = 0.69$)
- ب) باستعمال نتيجة السؤال السابق، بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n$
- 0.5 (لاحظ أن: $f(x) + x = 4xg(x)$)
- 0.25 ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.
- 0.5 د) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 3- نفترض أن $u_0 < 0$
- 0.5 أ) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$
- 0.5 ب) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq u_0 + nf(u_0)$
- 0.25 ج) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

انتهى