I. الاشتقاق في نقطة الاشتقاق على اليمين و اليسار:

01. تعريف (تذكير) :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و $\ell\in\mathbb{R}$ نقول أن : الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كان:

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ أو أيضا: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell$ العدد ℓ يسمى العدد المشتق ل f في x_0 و يرمز له ب : $f'(x_0)$

$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

02. خاصية:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0.

- معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي : $(T):y=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$
- كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0. (العكس ليس دائما صحيح) .
- تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي a و توجد دالة ε حيث :

$f(x)=f(x_0)+a(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$ $\forall x\in D_f\setminus\{x_0\}$ مع $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$. (و في هذه الحالة $f'(x_0)=a$).

03. الدالة التآلفية h ل f بجوار x_0:

- تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0.

الدالة h المعرفة ب: $h(x)=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة ل f بجوار x_0 .

نكتب $f(x)\approx h(x)$ بجوار x_0 (أي h تقريب ل f بجوار x_0)

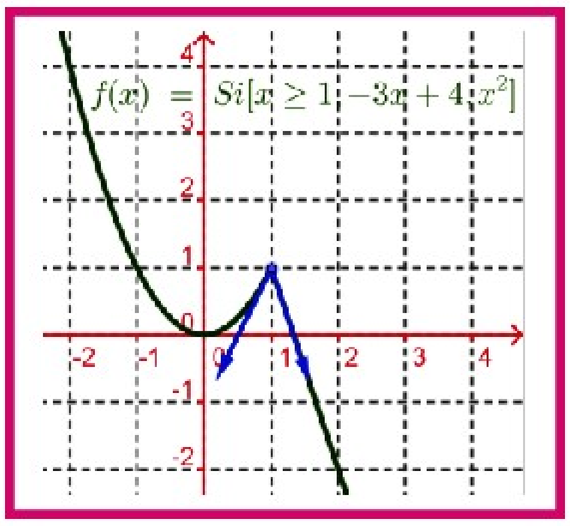
04. ملحوظة :

منحنى الدالة h هو المستقيم (T) المماس لمنحنى f في النقطة التي أفصولها x_0

05. نشاط 2 :

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x)=-3x+4 & ;x\geq 1\\ f(x)=x^2 & ;x<1\end{cases}$

1. أدرس اشتقاق f على يمين $x_0=1$. ثم أنشئ نصف المماس.
2. أدرس اشتقاق f على يسار $x_0=1$. ثم أنشئ نصف المماس.
3. هل f قابلة للاشتقاق في $x_0=1$ ؟
4. حدد معادلتي نصفي المماس لمنحنى الدالة f على يمين و يسار النقطة ذات الأفصول $x_0=1$.



الجواب

بطريقة مبيانيا

ملاحظة: النقطة ذات الأفصول $x_0=1$ تسمى نقطة مزواة .

Moutamadris.ma

.06 تعريف: (الاشتقاق على يمين x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0, x_0+\alpha[$ ، $(\alpha>0)$

f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_d = f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$

العدد $f_d'(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليمين x_0 ل f.

.07 تعريف: (الاشتقاق على يسار x_0)

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_0-\alpha, x_0]$ ، $(\alpha>0)$

f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_g = f_g'(x_0) \in \mathbb{R}$. العدد $f_g'(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليسا x_0

.08 خاصية:

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت ما يلي:

- f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0.
- f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0.
- العدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار في x_0 .أي $\left(f_d'(x_0)=f_g'(x_0)\right)$.

.09 تمرين تطبيقي :

أدرس اشتقاق f في x_0 : 1) $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $x_0=0$ على اليمين . 2) $f(x)=\sqrt[4]{x}$ ؛ $x_0=0$ على اليمين .

3) $f(x)=[x]$ $x_0=0$ على اليمين و على اليسار. 4) $f(x)=\arctan x$ ؛ $x_0=0$

II. اشتقاق دالة على مجال – الدالة المشتقة الأولى لدالة:

.01 تعريف:

- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في كل نقطة x_0 من $]a,b[$ نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$.
- f دالة عددية قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b[$ إذا كانت
  - الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$
  - f قابلة للاشتقاق على اليمين في a .

.02 الدالة المشتقة للدالة:

- تعريف:

الدالة التي تربط كل عنصر x_0 من المجال I بالعدد $f'(x_0)$ تسمى الدالة المشتقة ل f و نرمز لها ب f'

- ملحوظة :

إذا كان : $I=[a,b]$ و $I=[a,b[$ و $I=]a,b[$ نصطلح ان : $f'(a)=f_d'(a)$ و $f'(b)=f_g'(b)$

- مثال : الدالة المشتقة ل $f(x)=x^3$ على $\mathbb{R}$ هي $f'(x)=3x^2$.

III. جدول الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية: (الجدول1)

الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f '	الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f '
a	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$D_f=\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{2\times\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
x	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\cos x$	$D_f=\mathbb{R}$	$\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
x^n $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$\sin x$	$D_f=\mathbb{R}$	$\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ و $c\neq 0$	$\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ و $c\neq 0$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$	$\tan x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$1+\tan^2 x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

IV. العمليات على الدوال المشتقة:

01. خاصيات: (أنظر الجدول 2)

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I.

الدالة	مشتقتها	شرط	الدالة	مشتقتها	شرط
$f+g$	$(f+g)'=f'+g'$		$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$	g لا تنعدم على I
$\alpha\times f$	$(\alpha\times f)'=\alpha\times f'$	$\alpha\in\mathbb{R}$	f^n	$(f^n)'(x)=n\times(f(x))^{n-1}\times f'(x)$	$n\in\mathbb{N}^*$
$f\times g$	$(f\times g)'=f'\times g+f\times g'$		f^n	$(f^n)'(x)=n\times(f(x))^{n-1}\times f'(x)$	$n\in\mathbb{Z}^{-*}$ و f لا تنعدم على I
$\frac{1}{g}$	$\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$	g لا تنعدم على I			

02. أمثلة: أحسب الدالة المشتقة f ' للدالة f في الحالات التالية

أ- $f(x)=-2x^4+3x^2-1$. ب - $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-1}$. ج- $f(x)=2x\cos x$. د- $f(x)=1+(3x+2)^4$.

V. الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية (أو المتتابعة) لدالة f .

1. مفردات :

- المشتقة ل f ' تسمى المشتقة الثانية ل f . نرمز لها ب : $(f'(x))'=f''(x)=f^{(2)}(x)$.
- إذا كانت $f^{(2)}$ بدورها قابلة للاشتقاق على I فدالتها المشتقة $\left(f^{(2)}\right)'(x)$ تسمى المشتقة الثالثة ل f ونرمز لها ب $\left(f^{(2)}\right)'=f^{(3)}$

2. بصفة عامة :

Moutamadris.ma

المشتقة من الرتبة n للدالة f (أي $f^{(n)}(x)$)هي المشتقة ل $f^{(n-1)}(x)$ (أي المشتقة من الرتبة n-1) $(f^{(n-1)}(x))$ونرمز لها ب:

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x)$$

مثال:

أحسب $f^{(3)}(x)$ حيث : أ - $f(x)=x^5$ ب - $f(x)=\frac{1}{x^2}$. ج – بين أن : $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

VI. مشتقة مركب دالتين - مشتقة الدالة العكسية

01. مشتقة مركب دالتين :

1) مبرهنة 1 :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فإن $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0.
و لدينا: $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\times f'(x_0)$.

2) مبرهنة 2 :

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على I و $f(I)$ على التوالي
إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق في $f(I)$ فإن $g\circ f$ قابلة للاشتقاق على I .
و لدينا: $\forall x\in I:(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$.

3) نتائج :

مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x)=$	مجموعة تعريف f'	الدالة المشتقة $f'(x)=$	مجموعة تعريف f	الدالة $f(x)=$
$D_{f'}=\mathbb{R}$	$f'(x)=-a\times\sin(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f(x)=\cos(ax+b)$	$x\in D_{g'}$ و $g(x)>0$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\times\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_g$ و $g(x)\geq 0$	$f(x)=\sqrt{g(x)}$
$ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$f'(x)=a\left[1+\tan^2(ax+b)\right]$	$ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$f(x)=\tan(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$f'(x)=a\times\cos(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f(x)=\sin(ax+b)$

4) مثال:

أحسب $f'(x)$ مع أ - $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ ب - $f(x)=\cos(2x-4)$.

جواب :

- $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)'=\frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$
- $f'(x)=(\cos(2x-4))'=(2x-4)'\cos'(2x-4)=-2x\sin(2x-4)$

02. مشتقة الدالة العكسية

1) مبرهنة 1 :

لتكن f متصلة و رتيبة قطعا على I (لإذن الدالة f تقابل من المجال I إلى المجال $J=f(I)$).
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)\neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)=y_0$
لدينا: $(f^{-1})'(y_0)=(f^{-1})'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

2) برهان :

بمأن f متصلة على I إذن دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $J=f(I)$ و منه لكل y_0 من J لدينا $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$.
ندرس اشتقاق f^{-1} في y_0 من J . نضع $f^{-1}(y)=x$ و $f^{-1}(y_0)=x_0$ مع x و x_0 من I .
لدينا :

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}\in\mathbb{R}\ ;\ (f'(x_0)\neq 0)$$

$$=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\ ;\ (f^{-1}(y_0)=x_0)$$

$$=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(y_0)}$$

خلاصة : f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0=f(x_0)$ من $J=f(I)$ حيث : $(f^{-1})'(y_0)=(f^{-1})'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

3) مبرهنة 2 :

لتكن f دالة تقابل من المجال I إلى المجال $J=f(I)$.

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة f ' لا تنعدم على I (أي $\forall x\in I\ ;\ f'(x)\neq 0$) فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق المجال $J=f(I)$. لدينا: $(f^{-1})'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

4) تطبيق 1 : مشتقة: $\sqrt[n]{x}$ و x^r و $g(x)=[f(x)]^r$. (جدول 4)

$n\in\mathbb{N}^*$ و $r\in\mathbb{Q}^*$ و f موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على I		
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\left((x)^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.
$f(x)=x^r$	$f(x)=(x^r)'=rx^{r-1}$	
$g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$	$g'(x)=\dfrac{1}{n}\times f'(x)\times(f(x))^{\frac{1}{n}-1}$	g قابلة للاشتقاق على I
$g(x)=[f(x)]^r$	$g'(x)=([f(x)]^r)'=r\times f'(x)\times[f(x)]^{r-1}$	

Moutamadris.ma

▪ **أمثلة:** أحسب f' مع:

$f(x)=\sqrt[5]{x}$. $\quad f(x)=\sqrt[5]{x^2+1}$. $\quad f(x)=\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^7}$

جواب :

- $\left[f(x)=\sqrt[5]{x}\right]'=\left[x^{\frac{1}{5}}\right]'=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$
- $\left[f(x)=\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)}\right]'=\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{5}}\right]'=\frac{1}{5}\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{5}-1}=\frac{14}{7}x\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{5}}=\frac{14}{7}x\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^4}$
- $\left[f(x)=\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^7}\right]'=\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{5}}\right]'=\frac{7}{5}\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{5}-1}=\frac{14}{7}x\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{5}}=\frac{14}{7}x\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^2}$.

5) تطبيق 2 : مشتقة الدالة $f(x)=\arctan x$ **ثم** $f(x)=\arctan(u(x))$.

▪ **خاصية 1 :**

أ- الدالة $f(x)=\arctan x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

ب- إذا كانت الدالة $u(x)$ قابلة للاشتقاق على I فإن الدالة $f(x)=\arctan(u(x))$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$\forall x\in I : f'(x)=\left(\arctan(u(x))\right)'=\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}.$$

▪ **مثال :**

- $\left(\arctan\left(x^3-5x\right)\right)'=\frac{\left(x^3-5x\right)'}{1+\left(x^3-5x\right)^2}=\frac{3x^2-5}{1+\left(x^3-5x\right)^2}$.
- $\left(\arctan(\sin x)\right)'=\frac{(\sin x)'}{1+(\sin x)^2}=\frac{\cos x}{1+(\sin x)^2}$.
- $\left(\arctan^7\left(x^3-5x\right)\right)'=7\left(\arctan\left(x^3-5x\right)\right)'\arctan^6\left(x^3-5x\right)=7\frac{\left(x^3-5x\right)'}{1+\left(x^3-5x\right)^2}\arctan^6\left(x^3-5x\right)$

$$=\frac{3x^2-5}{1+\left(x^3-5x\right)^2}\arctan^6\left(x^3-5x\right)$$

VII. مبرهنة رول - مبرهنة التزايدات المنتهية :

A. مطارف دالة عددية قابلة للاشتقاق.

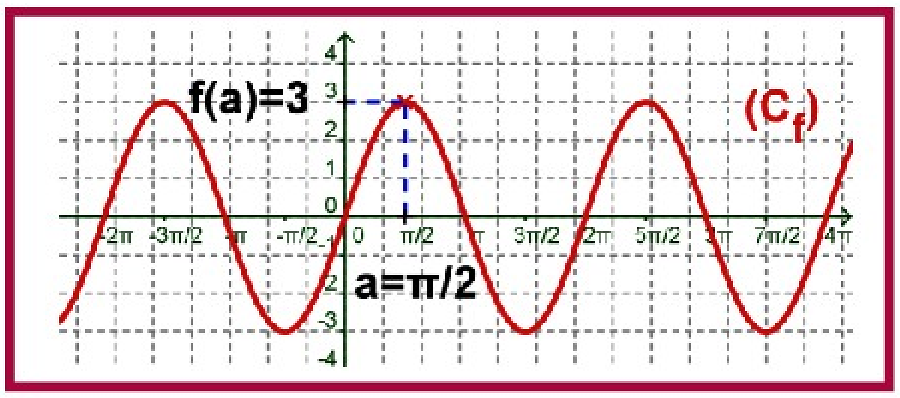
1. نشاط:

المنحنى الآتي يمثل دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. a عنصر من I.

1) هل f تقبل مطارف في a ؟

2) أعط قيمة ل $f'(a)$.

3) أعط الخاصية.

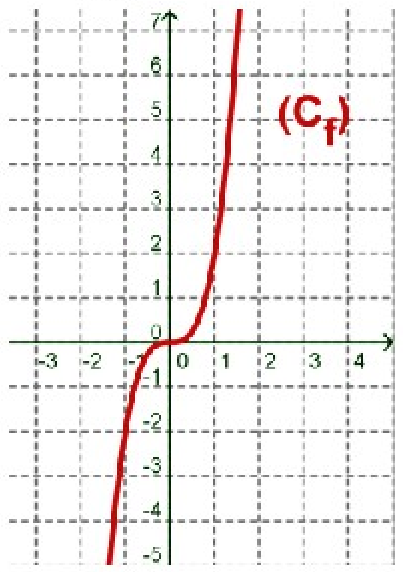


Moutamadris.ma

2. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I . a عنصر من I.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة a و تقبل مطراف في النقطة a فإن $f'(a)=0$.

الدالة $f(x)=2x^3$



3. ملحوظة :

إذا كان $f'(a)=0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن $f(a)$ مطراف للدالة f.

4. مثال :

$f(x)=2x^3$ لدينا : $f'(x)=6x^2$ ومنه : $f'(0)=0$

ولكن $f(0)$ ليس مطراف ل f.

5. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I . a عنصر من I
إذا كانت f' تنعدم في النقطة a و تتغير إشارتها بجوار a فإن $f(a)$ مطراف ل f.

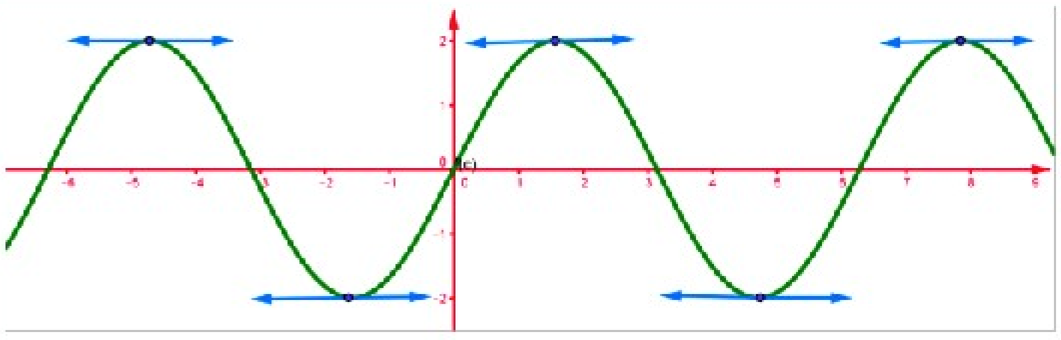
B. مبرهنة رول : théorème de Rolle

1. مبرهنة :

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a<b$. f دالة عددية تحقق ما يلي :

أ- f متصلة على القطعة $[a,b]$.
ب- f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.
ج- $f(a)=f(b)$.

إذن يوجد عنصر c من $]a,b[$ حيث $f'(c)=0$



2. برهان :

حالة 1 : f دالة ثابتة على $[a,b]$:

بمأن f دالة ثابتة على $[a,b]$ إذن : $\forall x\in]a,b[\;:\; f'(x)=0$.
و بالتالي المبرهنة صحيحة.

حالة 2 : f ليست بدالة ثابتة على $[a,b]$:

بمأن f متصلة على القطعة $[a,b]$ إذن $f([a,b])=[m,M]$ مع $m<M$ لأن f ليست بدالة ثابتة.

نضع : $m=f(\alpha)$ و $M=f(\beta)$ مع α و β من $[a,b]$..

إذن : $\forall x\in[a,b]\;\; m=f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)=M$. (1)

- حالة : $\alpha=a$ أو $\alpha=b$ نبين أن : $\beta\in]a,b[$.

بالنسبة ل : $\alpha=a$ لدينا $\beta\ne\alpha$ إذن $\beta\ne a$

نفترض أن : $\beta=b$ إذن $M=f(\beta)=f(b)=f(a)=f(\alpha)=m$ و هذا غير ممكن إذن $\beta\ne b$.

و منه : $\beta\in]a,b[$.

بنفس الطريقة ل $\alpha=b$. نحصل على $\beta\in]a,b[$.

و بالتالي f تقبل مطراف في β (قيمة قصوى حسب (1)).

Moutamadris.ma

إذن : $f'(\beta)=0$ يكفي أن نأخذ $c=\beta$.

3. ملحوظة :

يمكن تطبيق مبرهنة رول حيث f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ و $f(a)=f(b)$

C. مبرهنة التزايدات المنتهية T.A.F

1. مبرهنة :

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a<b$. f دالة عددية تحقق ما يلي :

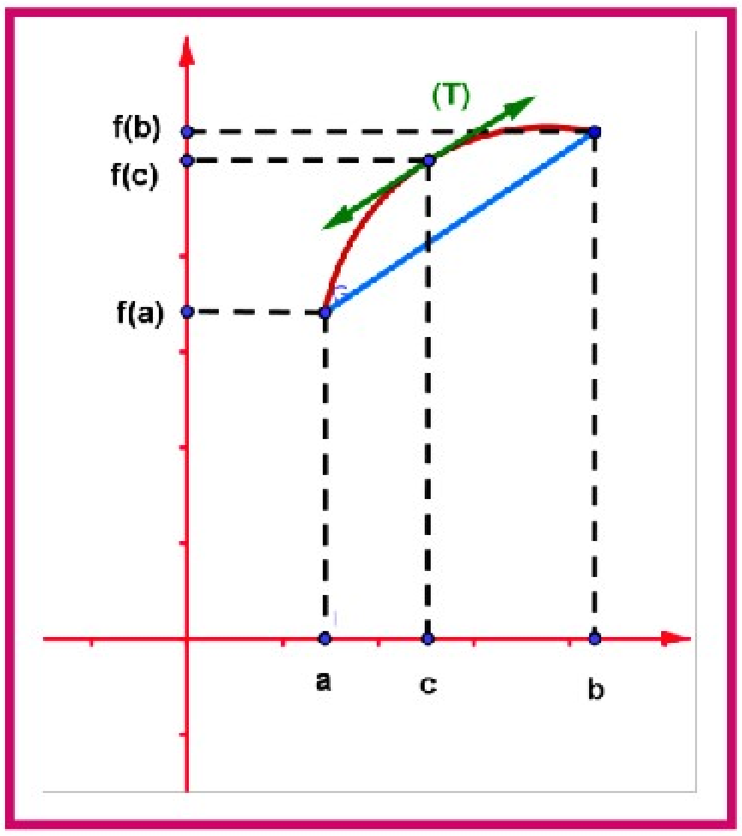
أ- f متصلة على القطعة $[a,b]$.

ب- f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.

إذن يوجد عنصر c من $]a,b[$ حيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

أو أيضا يوجد عنصر c من $]a,b[$ حيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

2. برهان :



نعتبر الدالة : g المعرفة على $[a,b]$ بما يلي : $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x-f(a)$

الدالة g تحقق ما يلي :

- g متصلة على القطعة $[a,b]$.
- g قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.
- $g(a)=g(b)$.

حسب مبرهنة رول $\exists c\in]a,b[\;:\; g'(c)=0 \quad (2)$

أي :

$$(2)\Leftrightarrow \exists c\in]a,b[\;:\; \left(f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x-f(a)\right)'_{x=c}=0$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in]a,b[\;:\; \left(f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)_{x=c}=0$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in]a,b[\;:\; f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in]a,b[\;:\; f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

3. ملحوظة :

يمكن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية حيث f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$

D. تطبيقات مبرهنة التزايدات المنتهية :

1. متفاوتة التزايدات المنتهية :

Moutamadris.ma

❖ خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. k عنصر من $\mathbb{R}^+$.
إذا كان : $\forall x\in I\ \ |f'(x)|\le k$ فإن $\forall x,y\in I\ \ |f(x)-f(y)|\le k|x-y|$.
أي : $\left(\forall x\in I\ \ |f'(x)|\le k\right)\Rightarrow\left(\forall x,y\in I\ \ |f(x)-f(y)|\le k|x-y|\right)$.

❖ برهان :

حالة 1 : $x=y$. لدينا : $|f(x)-f(y)|=0\le k|x-y|=0$ الاستلزام صحيح .
حالة 2 : $x\ne y$. نأخذ : $x<y$ (نفس الشيء ل $y<x$) .
لدينا : $[x,y]\subset I$ (لأن I مجال)
بمأن : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن f قابلة للاشتقاق على $[x,y]$.
إذن : $\exists c\in]x,y[\ :f(x)-f(y)=(x-y)f'(c)$ (حسب مبرهنة T.A.F)
ومنه : $|f(x)-f(y)|=|(x-y)f'(c)|=|x-y||f'(c)|\le k|x-y|$. مع $k\ge 0$ و $|f'(c)|\le k$.
خلاصة : $\left(\forall x\in I\ \ |f'(x)|\le k\right)\Rightarrow\left(\forall x,y\in I\ \ |f(x)-f(y)|\le k|x-y|\right)$

❖ مثال :

نبين : $\forall x,y\in\mathbb{R}:\ |\cos x-\cos y|\le|x-y|$.
نضع : $f(x)=\cos x$ لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x\in\mathbb{R}:\ |\cos x|\le 1$
ومنه حسب متفاوتة التزايدات المنتهية : $\forall x,y\in\mathbb{R}:\ |\cos x-\cos y|\le|x-y|$.

2. إشارة المشتقة الأولى و رتابة دالة :

❖ خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. k

- إذا كان $\forall x\in I:f'(x)\ge 0$ فإن f تزايدية على I.
- إذا كانت $\forall x\in I:f'(x)>0$ فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كان $\forall x\in I:f'(x)\le 0$ فإن f تناقصية على I.
- إذا كان $\forall x\in I:f'(x)<0$ فإن f تناقصية قطعا على I.
- إذا كان $\forall x\in I:f'(x)=0$ (على I بكامله) فإن f ثابتة على I.

3. برهان :

ليكن a و b من I مع $a<b$ لدينا : $[a,b]\subset I$ (لأن I مجال).
بمأن : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن f قابلة للاشتقاق على $[x,y]$.
ومنه حسب مبرهنة T.A.F : $\exists C\in]a,b[\ :f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.
حالة : $\forall x\in I:f'(x)\ge 0$ إذن : $f'(c)\ge 0$ و منه $(b-a)f'(c)\ge 0$ و بالتالي $f(b)-f(a)\ge 0$ أي $f(b)\ge f(a)$
خلاصة : f تزايدية على I.

4. ملحوظة : (يمكن للدالة 'f أن تنعدم في نقط منعزلة من I وهذا لا يؤثر على رتابة f)

ملحوظة:

في جميع الفقرات من هذا الدرس f دالة عددية للمتغير الحقيقي x و $\left(C_f\right)$ منحناها في (م . م . م) معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I. الاشتقاق وتطبيقاته:

01. المشتقة الأولى

A) رتابة دالة عددية:

1. خاصية :

f قابلة للاشتقاق على مجال I .

- إذا كانت $f'>0$ على I فإن f تزايدية قطعا على I (يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقط المنعزلة من I وهذا لا يؤثر على رتابة f) .
- إذا كانت $f'<0$ على I فإن f تناقصية قطعا على I .(نفس الشيء يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقط المنعزلة من I)
- إذا كانت $f'=0$ منعدمة على I (بكامله) فإن f ثابتة على I

2. مثال : أدرس تغيرات f على $\mathbb{R}$ مع $f(x)=(2x+4)^2$.

1) حساب f' : لدينا: $f'(x)=$ ....

=..................

2) إشارة f' : لدينا: $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

إذن : f' موجبة على............ و سالبة على................ ومنه جدول تغيرات f:

02. الدالة المشتقة الثانية وتطبيقاتها:

A) الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ والمماس ل $\left(C_f\right)$ في نقطة x_0

1. خاصية :

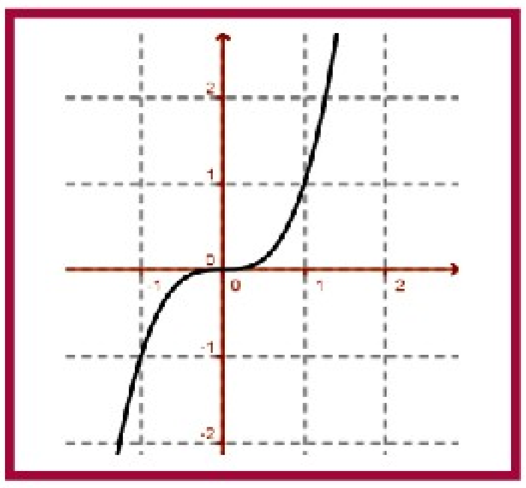
f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I و x_0 من I .

- إذا كان $f''(x_0)\geq 0$ فإن المنحنى $\left(C_f\right)$ يوجد فوق المماس ل $\left(C_f\right)$ في النقطة التي أفصولها x_0 .
- إذا كان $f''(x_0)\leq 0$ فإن المنحنى $\left(C_f\right)$ يوجد تحت المماس ل $\left(C_f\right)$ في النقطة التي أفصولها x_0 .

2. مثال: لنعتبر الدالة: $f(x)=x^3$

1) أحسب: $f''(x)$ ثم أعط إشارتها.

2) أنشئ بعض المماسات على المجال $[0,+\infty[$ ثم على $]-\infty,0]$.



B) تقعر منحنى $\left(C_f\right)$ - نقط انعطاف $\left(C_f\right)$:

1. تعريف:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. $\left(C_f\right)$ منحنى f في معلم.

منحنى f محدب (convexe) على I إذا كان $\left(C_f\right)$ يوجد فوق جميع مماساته على I. ونرمز له ب $\cup$

منحنى f مقعر (concave) على I إذا كان $\left(C_f\right)$ يوجد تحت جميع مماساته على I. ونرمز له ب $\cap$

$M_0(x_0,y_0)$ نقطة من $\left(C_f\right)$. (T) المماس ل $\left(C_f\right)$ في M_0 . النقطة M_0 (أو النقطة x_0) هي نقطة انعطاف ل $\left(C_f\right)$ يعني أن المماس (T) يخترق (أو يقطع) $\left(C_f\right)$ في M_0

Moutamadris.ma

2. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I.

- إذا كان : $\forall x\in I / f''(x)\geq 0$ فإن (C_f) محدب (convexe) على I (أو أيضا (C_f) له تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة).
- إذا كان : $\forall x\in I / f''(x)\leq 0$ فإن (C_f) مقعر (concave) على I(أو أيضا (C_f) له تقعر موجه نحو الأراتيب السالبة).
- الدالة المشتقة الثانية " f تنعدم في x_0 من I و تتغير إشارتها بجوار x_0 النقطة التي أفصولها x_0 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) (أو للدالة f) .

3. مثال: (أنظر ورقة الأنشطة المثال 2)

لنعتبر الدالة f حيث إشارة دالتها المشتقة الثانية "f هي بواسطة الجدول التالي:

x	$-\infty$ -5		-1	2 $+\infty$
$f''(x)$	$-$ 0	$+$	$-$ 0	$+$
تقعر (C_f)				

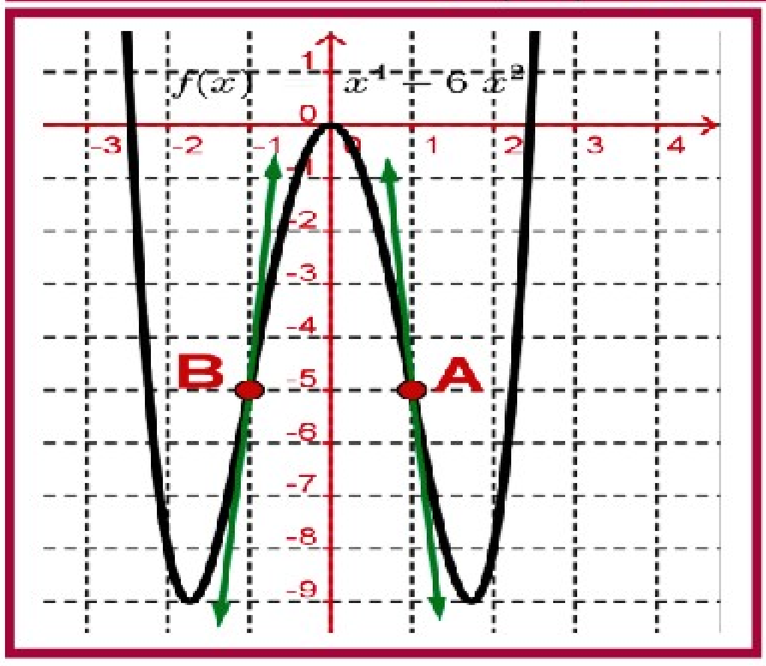
أعط تقعر (C_f) منحنى الدالة f

C) نقط انعطاف: POINTS D'INFLEXIONS

1. تعريف:

(C_f)منحنى دالة عددية f في معلم و $M_0(x_0,y_0)$ نقطة من (C_f). (T) المماس ل (C_f) في M_0 .

النقطة M_0 (أو النقطة x_0) هي نقطة انعطاف ل (C_f) يعني أن المماس (T) يخترق (أو يقطع) (C_f) في M_0



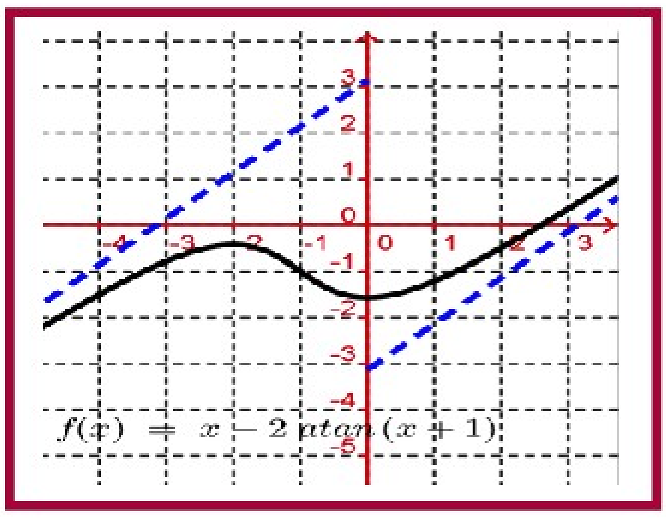
2. مثال: لنعتبر الدالة $f(x)=x^4-6x^2$

$A\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$ نقطتي انعطاف ل (C_f)

3. خاصية:

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I. x_0 من I.

الدالة المشتقة الثانية " f تنعدم في x_0 من I و تتغير إشارتها بجوار x_0 النقطة التي أفصولها x_0 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) (أو للدالة f) .



مثال 1:

1. هل الدالة f تقبل نقط انعطاف حددها ؟
2. أنشئ نقط انعطاف (C_f). إذا كان ممكن.

II. الفروع اللانهائية لمنحنى دالة f :

A) فرع اللانهائي :

1. تعريف:

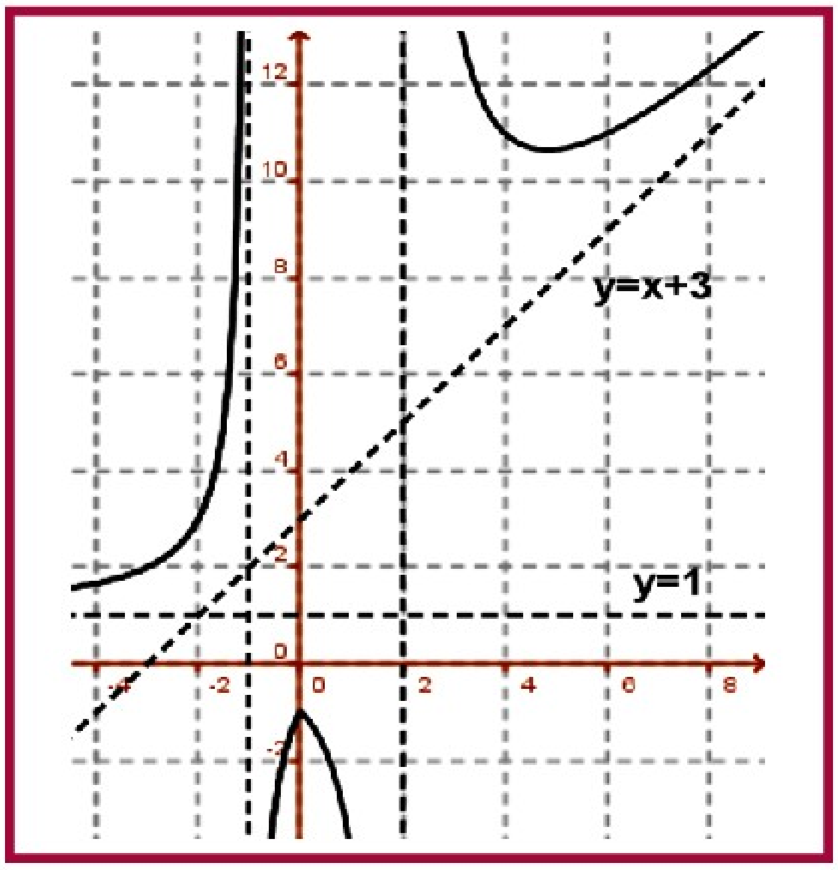
(C_f)منحنى دالة عددية f في معلم. إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة M من (C_f) إلى ما لا نهاية فإن (C_f) يقبل فرع اللانهائي.

Moutamadris.ma

2. نشاط:

1) حدد الفروع اللانهائية ل $\left(C_f\right)$.

2) أعط تعاريف لكل نوع من هذه الفروع اللانهائية.



B) مقارب أفقي- ASYMPTOTE HORIZONTALE

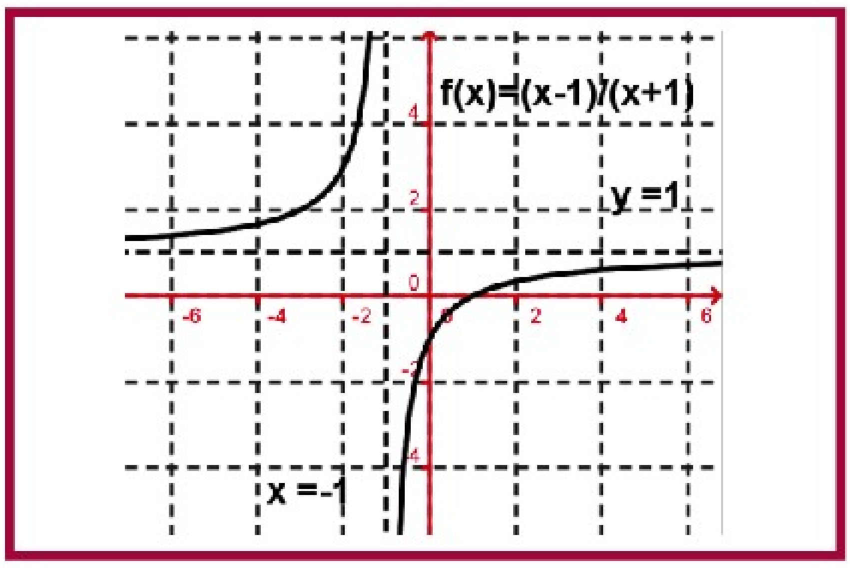
1. تعريف:

f دالة عددية معرفة على $\left[a,+\infty\right[$ (أو $\left]-\infty,a\right[$).

إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$) فإن المستقيم ذي المعادلة y=b (أو y=c) مقارب أفقي ل $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$).

2. مثال: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذن المستقيم ذي المعادلة $y=1$ مقارب أفقي ل $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$.



C) مقارب عمودي – ASYMPTOTE VERTICALE:

1. تعريف:

f دالة عددية معرفة $D\setminus\left\{x_0\right\}$ (أي f غير معرفة في x_0)

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ (أو $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$) فإن المستقيم ذي المعادلة $x=x_0$ مقارب عمودي ل $\left(C_f\right)$ عند x_0 (على اليمين) أو على اليسار).

2. مثال: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ لدينا: $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ إذن المستقيم ذي المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي ل $\left(C_f\right)$.

D) مقارب مائل –ASYMPTOTE OBLIQUE :

- **تعريف:**

f دالة عددية معرفة على $\left[a,+\infty\right[$ (أو $\left]-\infty,a\right[$). $\left(C_f\right)$ منحنى دالة عددية f في معلم.

المستقيم ذي المعادلة $y=ax+b$ (أو $y=a'x+b'$) هو مقارب مائل ل $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) يعني:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0\end{cases} \quad \text{أو} \quad \left(\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0\end{cases}\right)$$

Moutamadris.ma

▪ **مثال:** لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x-2+\dfrac{1}{x-1}$

بين أن: (C_f) يقبل مقارب مائل بجوار $+\infty$. نحسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$

خلاصة: المستقيم ذي المعادلة $y=x-2$ يسمى مقارب مائل بجوار ∞ ل (C_f).

▪ **ملاحظات:**

- إذا كان $f(x)-(ax+b)\geq 0$ فإن (C_f) يكون فوق المقارب المائل الذي معدلته $y=ax+b$.
- إذا كان $f(x)-(ax+b)\leq 0$ فإن (C_f) يكون تحت المقارب المائل الذي معدلته $y=ax+b$.
- إذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن (C_f) يقطع المقارب المائل الذي معدلته $y=ax+b$.

▪ **تحديد :** b a

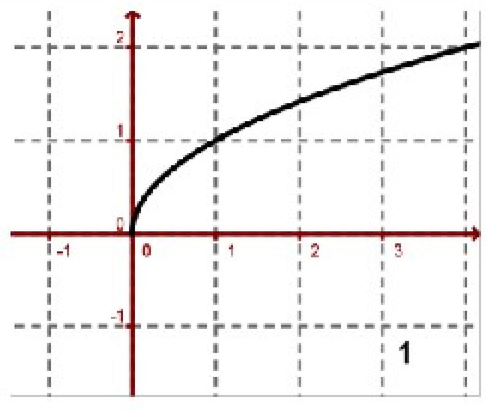
تحديد a و b مع الحالات الخاصة:

لتحديد a نحسب: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$.

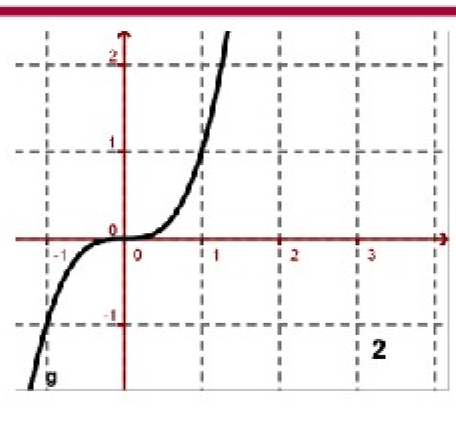
- إذا كان : $a=0$ نقول أن : (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل. (أنظر الرسم 1).
- إذا كان : $a=\infty$ نقول أن : (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب. (أنظر 7 الرسم 2)
- $a\in\mathbb{R}^*$ (أي $a\neq 0$ و $a\neq\infty$) و $b=\infty$ في هذه الحالة نبحث عن b .

لتحديد b نحسب : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=b$. بشرط $a\in\mathbb{R}^*$ (أي $a\neq 0$ و $a\neq\infty$).

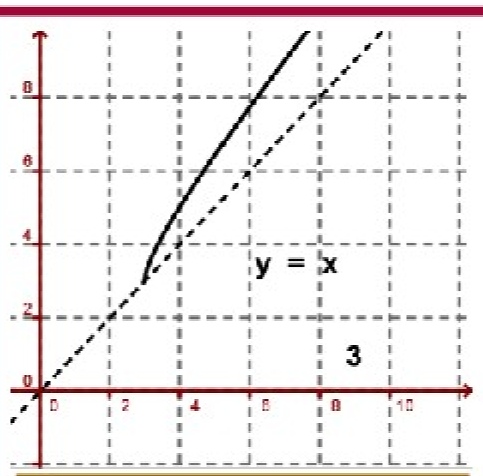
- $b=\infty$ هذه الحالة نقول أن : (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$ بجوار ∞. أو أيضا : (C_f) يقبل اتجاه مقاربي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$ بجوار ∞. (أنظر الرسم 3)
- $b\in\mathbb{R}$ (حتى $b=0$) في هذه الحالة نقول أن : (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=ax+b$. (أنظر الرسم 4)



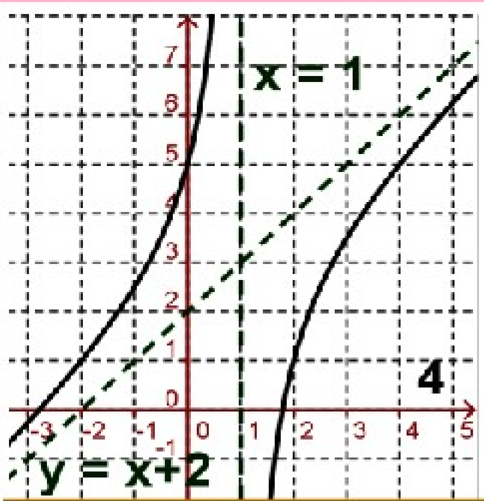
$f(x)=\sqrt{x}$ منحناها يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل



$f(x)=x^3$ منحناها يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب



$f(x)=x+\sqrt{x-3}$ منحناها يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم $D:y=x$



$f(x)=x+3-\dfrac{(x+2)}{(x-1)}$ منحناها يقبل مقارب مائل معادلته $D:y=x+2$

2. ملحوظة:

إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=c$ فإن (C_f) يقبل مقارب مائل الذي معادلته $y=ax+b+c$ بجوار ∞.

Moutamadris.ma

.3 مثال: $f(x)=x+3-\dfrac{(x+2)}{(x-1)}$.

لدينا : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+3)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}-\dfrac{(x+2)}{(x-1)}=-1$ و منه المستقيم الذي معادلته $y=x+2$ مقار مائل ل (C_f) بجوار $\pm\infty$.

III. محور تماثل – مركز تماثل منحنى .

A) مركز تماثل منحنى :

- خاصية:

> f دالة عددية معرفة D_f . (C_f) منحنها على D_f في معلم. $I(a,b)$ نقطة من المستوى (P).
>
> النقطة $I(a,b)$ هي مركز تماثل ل (C_f) يكافئ : $\begin{cases}\forall x\in D_f\ ;\ 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f\ ;\ f(2a-x)+f(x)=2b\end{cases}$.

B) محور تماثل ل (C_f):

- خاصية:

> f دالة عددية معرفة D_f . (C_f) منحنها على D_f في معلم م.م . $D: x=a$ مستقيم من المستوى (P).
>
> المستقيم الذي معادلته $D: x=a$ هو محور تماثل ل (C_f) يكافئ : $\begin{cases}\forall x\in D_f\ ;\ 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f\ ;\ f(2a-x)=f(x)\end{cases}$.

- مثال: $f(x)=(x-1)^2+1$ حدد محور تماثل (C_f)

IV. مجموعة دراسة دالة

.1 تعاريف:

> f دالة عددية معرفة على $D_f=I\cup I'$ حيث I و I' متماثلين بالنسبة ل 0 مع I يحتوي على الأعداد الموجبة و I' يحتوي على الأعداد السالبة.
>
> - إذا كانت f زوجية أو فردية يكفي دراسة على المجموعة $D_E=I$ أو $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$.
>   - أ- تغيرات f على I' هي نفس تغيرات f على I إذا كانت f فردية.
>   - ب- تغيرات f على I' هي عكس تغيرات f على I إذا كانت f زوجية.
> - إذا كانت f دورية و دورها $P=T$ يكفي دراسة على $D_E=D_f\cap J$ مع J مجال طوله T . $D_E=D_f\cap[a,a+T]$ مع $a\in\mathbb{R}$

.2 مثال:

$f(x)=\sin(x)$ هي معرفة على $\mathbb{R}$ ودورية ودورها 2π أي دراستها على مجال طوله $P=T$:

$D_E=\mathbb{R}\cap[0,2\pi[=[0,2\pi[$. أو $D_E=\mathbb{R}\cap[0,2\pi]=[0,2\pi]$. أو $D_E=\mathbb{R}\cap[-\pi,\pi[=[-\pi,\pi[$ أو ....

.3 ملحوظة:

> إذا كانت f دورية و دورها $P=T$ و زوجية (أو فردية) على D_f يكفي دراستها على مجال طوله $\dfrac{T}{2}$ أي $D_E=D_f\cap\left[0,\dfrac{T}{2}\right]$ أو
>
> $D_E=\mathbb{R}\cap\left[-\dfrac{T}{4},\dfrac{T}{4}\right[$.

4. مثال:

- **مثال 1 :** $f(x)=\sin(x)$ هي معرفة و دورية و فردية على $\mathbb{R}$ ودورها $T=2\pi$. ندرس الدالة f على مجال طوله π .
  خلاصة: مجموعة دراسة الدالة هي $D_E=\mathbb{R}\cap[0,\pi]=[0,\pi]$ أي $D_E=[0,\pi]$.
- **مثال 2 :** $f(x)=\cos(x)$ هي معرفة على $\mathbb{R}$. ودورية ودورها 2π و زوجية. ندرسها على مجال طوله π .
  خلاصة: مجموعة دراسة الدالة هي $D_E=\mathbb{R}\cap[0,\pi]=[0,\pi]$ أي $D_E=[0,\pi]$.

V. تصميم دراسة دالة عددية :

1	مجموعة تعريف الدالة f: D_f	8	دراسة إشارة f' على D_f أو D_E
2	دراسة زوجية f أو دورية f (إذا كان ذلك ممكن)	9	إعطاء جدول تغيرات f على D_f أو D_E
3	استنتاج مجموعة دراسة f : D_E	10	إذا كان ذلك ممكن دراسة تقعر أو نقط انعطاف f
4	نهايات f عند محدات D_f أو D_E	11	إنشاء 1) المعلم - 2) المقاربات - 3) بعض المماسات (حيث $f'(x)=0$ أو نقط انعطاف f إذا كان ممكن..)– 4) إنشاء (C_f)
5	استنتاج الفروع اللانهائية ل f	12	هناك بعض الأسئلة الإضافية مثل حل مبيانيا المعادلة $x\in D_f / f(x)=m$ و $x\in D_f / f(x)=g(x)$ أو المتراجحة $x\in D_f / f(x)\leq 0$..
6	دراسة الوضع النسبي للمنحى f و المقارب المائل (إذا كان ذلك ممكن)	13	ثم دراسة الدالة $g(x)=\sqrt{f(x)}$ أو $g(x)=f(\|x\|)$
7	حساب الدالة المشتقة f' ل f على D_f أو D_E	14	أو أسئلة أخرى ربط هذه الدالة بالفيزياء أو ....

VI. مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب:

$f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. وليكن (C_f) منحنى f في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2) أحسب النهايات عند محد ات D_f.
3) حدد a ; b ; c من $\mathbb{R}$: $\forall x\in D_f ; f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$
4) أدرس الفروع اللا نهائية للمنحنى (C_f).
5) أدرس الوضعية النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة لمقاربه المائل .
6) أحسب $f'(x)$ لكل x من D_f.
7) أدرس إشارة f' على D_f ثم أعط جدول تغيرات f .
8) أدرس تقعر المنحنى (C_f) على D_f .
9) بين أن النقطة $I(1,1)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) .

Moutamadris.ma