

القوى

I_ قوة عدد حقيقي:

(1) - تعريف :

ليكن a عددا حقيقيا و n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n > 1$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ مرة}}$$

$$a^1 = a \quad ; \quad a^0 = 1$$

*/ مفردات :

a^n تسمى : القوة n للعدد a

a يسمى : الأساس

n يسمى : الأس

(2) - إشارة قوة أساسها سالب :

(أ) -- خاصية :

a عدد حقيقي سالب و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم

يكون $a^n \geq 0$ إذا كان n عددا زوجيا

يكون $a^n \leq 0$ إذا كان n عددا فرديا

(ب) -- أمثلة :

$$\left(-\sqrt{11}\right)^{124} \geq 0 \quad \text{لأن } 124 \text{ عدد زوجي}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{7}\right)^{11} \leq 0 \quad \text{لأن } 11 \text{ عدد فردي}$$

$$-\sqrt{5}^{12} \leq 0 \quad \text{لأن الأساس } \sqrt{5} \text{ و ليس } (-\sqrt{5})$$

(ج) - ملاحظة هامة :

a عدد حقيقي غير منعدم و n عدد صحيح طبيعي .

$$-a^n \neq (-a)^n \quad ; \quad \text{إذًا كان } n \text{ عددًا زوجيًا فإن}^*$$

$$-a^n = (-a)^n \quad ; \quad \text{إذًا كان } n \text{ عددًا فرديًا فإن}^*$$

$^*/$ تمرين تطبيقي :

أحسب ما يلي :

$$a = (-4)^3 \quad ; \quad b = -2^4$$

$$c = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3 \quad ; \quad d = -\left(\frac{-2^3}{3}\right)$$

$$e = -(-\sqrt{5})^2 \quad ; \quad f = (-\sqrt{\sqrt{16}})^2$$

$^*/$ الحل :

$$a = (-4)^3 = -4^3 = -64 \quad ; \quad b = -2^4 = -16$$

$$c = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \frac{16}{25} + \frac{-1}{8} = \frac{128}{200} + \frac{-25}{200} = \frac{103}{200}$$

$$d = -\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \quad ; \quad e = -(-\sqrt{5})^2 = -\sqrt{5}^2 = -5$$

$$f = (-\sqrt{\sqrt{16}})^2 = (\sqrt{\sqrt{16}})^2 = \sqrt{16} = 4$$

(3) - قوة أُسها سالب :

(أ) -- تعريف :

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و n عدد صحيح طبيعي

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

(ب) -- أمثلة :

$$\sqrt{2}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \left(\frac{-3}{\sqrt{5}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{-3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$(3 + \sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{(3 + \sqrt{2})} = \frac{1(3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{3 - \sqrt{2}}{3^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}$$

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و m و n عددان صحيحان نسبيين

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad ; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \quad ; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

(2) - أمثلة :

$$a = \sqrt{5}^3 \times \sqrt{5}^{-7} = \sqrt{5}^{3-7} = \sqrt{5}^{-4} = \frac{1}{\sqrt{5}^4} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$b = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{11} \times \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-6} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{11-6+1} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$c = \sqrt{5}^3 \times \sqrt{7}^3 = (\sqrt{5} \times \sqrt{7})^3 = \sqrt{35}^3 = \sqrt{35^2 \times 35} = 35\sqrt{35}$$

$$d = 3^{-2} \times \sqrt{3}^{-2} \times \sqrt{2}^{-2} = (3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2})^{-2} = (3\sqrt{6})^{-2} = \frac{1}{(3\sqrt{6})^2} = \frac{1}{54}$$

$$e = \frac{\sqrt{7}^3}{\sqrt{7}^{-2}} = \sqrt{7}^{3-(-2)} = \sqrt{7}^{3+2} = \sqrt{7}^5 = \sqrt{7^4 \times 7} = 7^2 \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$$

$$f = \frac{\sqrt{2}^{-4}}{\sqrt{2}^2} = \sqrt{2}^{-4-2} = \sqrt{2}^{-6} = \frac{1}{\sqrt{2}^6} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$g = \frac{\sqrt{45}^3}{\sqrt{5}^3} = \left(\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{45}{5}}\right)^3 = \sqrt{9}^3 = 3^3 = 27$$

$$h = \frac{\sqrt{3}^4}{\sqrt{2}^4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$i = (\sqrt{7}^2)^3 = \sqrt{7}^{2 \times 3} = \sqrt{7}^6 = 7^3 = 343$$

$$j = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}^4\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^8 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

* / تمرين تطبيق :

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و $a \neq 3$.

بسط ما يلي :

$$A = \frac{a^2 \times (a^5)^3}{(a \times a^2)^4} ; \quad B = \frac{a^{-5} \times b^{-3} \times a^{-2}}{a^3 \times (b^{-2})^3} ; \quad C = \left[1 + \left(\frac{3-a}{1+a} \right)^{-1} \right]^{-1}$$

* / الحل :

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 \times (a^5)^3}{(a \times a^2)^4} ; & B &= \frac{a^{-5} \times b^{-3} \times a^{-2}}{a^3 \times (b^{-2})^3} ; & C &= \left[1 + \left(\frac{3-a}{1+a} \right)^{-1} \right]^{-1} \\ &= \frac{a^2 \times a^{15}}{(a^3)^4} & &= \frac{a^{-5-2} \times b^{-3}}{a^3 \times b^{-6}} & &= \left[1 + \left(\frac{1+a}{3-a} \right)^1 \right]^{-1} \\ &= \frac{a^{17}}{a^{12}} & &= \frac{a^{-7} \times b^{-3}}{a^3 \times b^{-6}} & &= \left[1 + \frac{1+a}{3-a} \right]^{-1} \\ &= a^{17-12} & &= a^{-7-3} \times b^{-3+6} & &= \left[\frac{3-a}{3-a} + \frac{1+a}{3-a} \right]^{-1} \\ &= a^5 & &= a^{-10} \times b^3 & &= \left[\frac{3-a+1+a}{3-a} \right]^{-1} \\ & & & & &= \left[\frac{4}{3-a} \right]^{-1} \\ & & & & &= \frac{3-a}{4} \end{aligned}$$

III_ الكتابة العلمية :

(1) - قوى العدد 10 :

(أ) -- خصائص :

n عدد صحيح طبيعي

$$10^n = \underbrace{1000000000 \dots 0}_{n \text{ من الأصفار}} ; \quad 10^{-n} = \underbrace{0,00000000 \dots 01}_{n \text{ من الأصفار}}$$

n من الأصفار

n من الأصفار

(ب) - أمثلة :

$$10^7 = 10000000 \quad ; \quad 10^{-9} = 0,000000001$$
$$100000000000 = 10^{11} \quad ; \quad 0,00001 = 10^{-5}$$

(2) - الكتابة العلمية :

(أ) -- تعريف :

a عدد عشري و n عدد صحيح نسبي

الكتابة : $x = a \times 10^n$ أو $x = -a \times 10^n$ تسمى كتابة علمية للعدد x
بحيث : $1 \leq a < 10$

(ب) -- أمثلة :

1/ - لنحدد الكتابة العلمية للعدد $a = 3452$.
لدينا :

$$a = 3452$$
$$= 3,452 \times 10^3$$

إذن الكتابة العلمية للعدد a هي : $3,452 \times 10^3$.

2/ - لنحدد الكتابة العلمية للعدد $b = 0,00000234$.
لدينا :

$$b = 0,00000234$$
$$= 2,34 \times 10^{-6}$$

إذن الكتابة العلمية للعدد b هي : $2,34 \times 10^{-6}$.

3/ - لنحدد الكتابة العلمية للعدد $c = 678,25 \times 10^5$.
لدينا :

$$c = 678,25 \times 10^5$$
$$= 6,7825 \times 10^2 \times 10$$
$$= 6,7825 \times 10^7$$

إذن الكتابة العلمية للعدد c هي : $6,7825 \times 10^7$.

4- لنحدد الكتابة العلمية للعدد $d = 0,000981 \times 10^{23}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}d &= 0,000981 \times 10^{23} \\ &= 9,81 \times 10^{-4} \times 10^{23} \\ &= 9,81 \times 10^{19}\end{aligned}$$

إذن الكتابة العلمية للعدد d هي : $9,81 \times 10^{19}$.

5- لنحدد الكتابة العلمية للعدد $e = -24,5 \times 10^{-11} \times 1,2 \times 10^3$.

لدينا :

$$\begin{aligned}e &= -24,5 \times 10^{-11} \times 1,2 \times 10^3 \\ &= -24,5 \times 1,2 \times 10^{-11} \times 10^3 \\ &= -29,4 \times 10^{-8} \\ &= -2,94 \times 10^1 \times 10^{-8} \\ &= -2,94 \times 10^{-7}\end{aligned}$$

إذن الكتابة العلمية للعدد e هي : $-2,94 \times 10^{-7}$.

6- لنحدد الكتابة العلمية للعدد $f = \frac{25,5 \times 10^{-16}}{0,05 \times 10^3}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}f &= \frac{25,5 \times 10^{-16}}{0,05 \times 10^3} \\ &= \frac{25,5}{0,05} \times \frac{10^{-16}}{10^3} \\ &= 510 \times 10^{-16-3} \\ &= 510 \times 10^{-19} \\ &= 5,10 \times 10^2 \times 10^{-19} \\ &= 5,1 \times 10^{-17}\end{aligned}$$

إذن الكتابة العلمية للعدد f هي : $5,1 \times 10^{-17}$.

7/- لنحدد الكتابة العلمية للعدد $g = 113 \times 10^5 + 7,2 \times 10^7$.

$$\begin{aligned} g &= 113 \times 10^5 + 7,2 \times 10^7 \\ &= 113 \times 10^5 + 7,2 \times 10^5 \times 10^2 \\ &= (113 + 7,2 \times 10^2) \times 10^5 \\ &= (113 + 720) \times 10^5 \end{aligned}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} &833 \times 10^5 \\ &= 8,33 \times 10^2 \times 10^5 \\ &= 8,33 \times 10^7 \end{aligned}$$

إذن الكتابة العلمية للعدد g هي : $8,33 \times 10^7$.

$$\begin{aligned} h &= 5 \times 10^{-3} + 3,2 \times 10^{-7} - 523 \times 10^{-5} \\ &= 5 \times 10^{-3} + 3,2 \times 10^{-3} \times 10^{-4} - 523 \times 10^{-3} \times 10^{-2} \\ &= (5 + 3,2 \times 10^{-4} - 523 \times 10^{-2}) \times 10^{-3} \\ &= (5 + 0,00032 - 5,23) \times 10^{-3} \end{aligned}$$

8/- لنحدد الكتابة العلمية للعدد

$$\begin{aligned} &= -0,22968 \times 10^{-3} \\ &= -2,2968 \times 10^{-1} \times 10^{-3} \\ &= -2,2968 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

إذن الكتابة العلمية للعدد h هي : $-2,2968 \times 10^{-4}$.