



المستوى : الجذع مشترك علمي الأستاذ : عثمانى نجيب	مادة الرياضيات	أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة
---	----------------	--------------------------------------

مذكرة رقم 1 في مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ أولية في الحسابيات

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

- التعرف على المجموعة \mathbb{N} .
- التعرف على مضاعفات و قواسم عدد.
- التمييز بين الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية.
- التعرف على مصاديق قابلية القسمة على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.
- التعرف على عدد أولي.
- استعمال تقنيات تفكيك عدد صحيح طبيعي إلى جذاء عوامل أولية.
- توظيف التفكيك في تحديد القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر.
- توظيف خوارزمية إقليدس في تحديد القاسم المشترك الأكبر.
- توظيف الزوجية و تفكيك عدد إلى جذاء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.

$a \times b$	$a-b$	$a+b$	b	a	الأعداد
زوجي	زوجي	زوجي	زوجي	زوجي	زوجية
فردى	زوجي	زوجي	فردى	فردى	الأعداد
زوجي	فردى	فردى	زوجي	فردى	
زوجي	فردى	فردى	فردى	زوجي	

مثال: أدرس زوجية الأعداد: 12^2 و 15×1731

تمرين: $n \in \mathbb{N}$ أدرس زوجية الأعداد التالية:

$$6n^2 + 12n \quad 4n^2 + 4n + 1 \quad 4n + 9 \quad 2n + 4 \quad 4 \times 51 + 1 \quad 4516$$

الجواب: $4516 = 2 \times 2258$ إذن $4516 = 2 \times k$ حيث: $k = 2258$

وبالتالى: 4516 عدد زوجي

$$k = 2 \times 571 \quad \text{حيث: } 4 \times 571 + 1 = 2 \times 2 \times 571 + 1 = 2 \times k + 1$$

وبالتالى: $4 \times 51 + 1$ عدد فردي

$$k = n + 2 \quad \text{حيث: } 2n + 4 = 2(n + 2) = 2 \times k$$

وبالتالى: $2n + 4$ عدد زوجي

$$k = 2n + 4 \quad \text{حيث: } 4n + 9 = 2(2n + 4) + 1 = 2 \times k + 1$$

وبالتالى: $4n + 9$ عدد فردي

$$k = 2n^2 + 2n \quad \text{حيث: } 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2 \times k + 1$$

وبالتالى: $4n^2 + 4n + 1$ عدد فردي

$$k = 3n^2 + 6n \quad \text{حيث: } 6n^2 + 12n = 2(3n^2 + 6n) = 2 \times k$$

وبالتالى: $6n^2 + 12n$ عدد زوجي

تمرين: $a \in \mathbb{N}$ و $b \in \mathbb{N}$

1. بين أنه إذا كان a عددا زوجيا و b عددا زوجيا فإن $a + b$ عدد زوجي

2. بين أنه إذا كان a عددا فرديا و b عددا فرديا فإن $a + b$ عدد فردي

3. بين أنه إذا كان a عددا زوجيا فإن a^2 عدد زوجي

4. بين أنه إذا كان a عددا فرديا فإن a^2 عدد فردي

5. استنتج أنه إذا كان a^2 عدد فرديا فإن a عددا فردي

الجواب:

$$(1) \quad a = 2 \times k \quad \text{حيث } k \in \mathbb{N}$$

$$b = 2 \times k' \quad \text{حيث } k' \in \mathbb{N}$$

$$a + b = 2 \times k + 2 \times k' = 2 \times (k + k') = 2 \times k''$$

وبالتالى: $a + b$ عدد زوجي

$$(2) \quad a = 2 \times k + 1 \quad \text{حيث } k \in \mathbb{N}$$

$$b = 2 \times k' + 1 \quad \text{حيث } k' \in \mathbb{N}$$

I. مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية \mathbb{N} .

تمرين: من بين الأعداد التالية حدد تلك التي تمثل أعدادا صحيحة طبيعية : $2, -5, 11, \frac{11}{4}, 12-17, \sqrt{2}, \sqrt{16}, 5, 2$.

تعريف: كل الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة نرّمز لها بالرمز \mathbb{N}

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

مصطلحات ورموز: العدد 0 يسمى العدد الصحيح الطبيعي المنعدم

الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة تكون مجموعة نرّمز لها بالرمز \mathbb{N}^* .

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$$

7 هو عدد صحيح طبيعي نكتب $7 \in \mathbb{N}$

-8 ليس بعدد صحيح طبيعي نكتب $-8 \notin \mathbb{N}$

تمرين: باستعمال الرموز: $\in; \notin; \subset; \supset; \varnothing$ املا الفراغات التالية :

$$-7 \dots \mathbb{N} \quad \text{و} \quad \frac{2}{3} \dots \mathbb{N} \quad \text{و} \quad \sqrt{2} \dots \mathbb{N} \quad \text{و} \quad \frac{8}{2} \dots \mathbb{N} \quad \text{و} \quad -\frac{15}{3} \dots \mathbb{N}$$

$$\text{و} \quad 12-32 \dots \mathbb{N} \quad \text{و} \quad \sqrt{25} \dots \mathbb{N} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{100}}{5} \dots \mathbb{N} \quad \text{و} \quad 2, 12 \dots \mathbb{N}$$

$$\pi \dots \mathbb{N} \quad \text{و} \quad 0 \dots \mathbb{N}^* \quad \text{و} \quad \{1; 2; 7\} \dots \mathbb{N} \quad \text{و} \quad \{4; -2; 12\} \dots \mathbb{N} \quad \text{و} \quad \mathbb{N}^* \dots \mathbb{N}$$

$$\text{الجواب: } -7 \notin \mathbb{N} \quad \frac{2}{3} \notin \mathbb{N} \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{N} \quad \frac{8}{2} \in \mathbb{N} \quad -\frac{15}{3} \in \mathbb{N}$$

$$12-32 \notin \mathbb{N} \quad \sqrt{25} \in \mathbb{N} \quad \frac{\sqrt{100}}{5} \in \mathbb{N} \quad 2, 12 \in \mathbb{N} \quad \pi \notin \mathbb{N}$$

$$0 \notin \mathbb{N}^* \quad \{1; 2; 7\} \subset \mathbb{N} \quad \{4; -2; 12\} \not\subset \mathbb{N} \quad \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$$

II. الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية:

تعريف: a عدد صحيح طبيعي زوجي إذا وجد عدد صحيح طبيعي k بحيث :

$$a = 2k$$

a عدد صحيح طبيعي فردي إذا وجد عدد صحيح طبيعي k بحيث :

$$a = 2k + 1$$

مثال: الأعداد: $0, 108, 304, 202, 1006$ و 12^2 و 15×1731 هي

أعداد زوجية. لماذا ؟

الأعداد: $1, 13, 165, 209, 2007$ هي أعداد فردية. لماذا ؟

ملاحظات: كل عدد صحيح طبيعي إما هو زوجي أو فردي ولدينا مجموعة من

النتائج في الجدول التالي :

تمرين: نضع: $x = 3 \times 5 \times 7 \times 12$ و $y = 2 \times 5 \times 3 \times 5$.

دون حساب x و y بين أن:

1. 75 قاسم للعدد y .

2. 105 قاسم للعدد x .

الجواب (1): لدينا $y = 2 \times 5 \times 3 \times 5$ أي أن: $y = 2 \times 75$ و منه فإن 75 قاسم للعدد y .

(2) لدينا $x = 3 \times 5 \times 7 \times 12$ أي أن: $x = 105 \times 12$ و منه فإن 105 قاسم للعدد x .

تمرين: حدد الرقم x لكي يكون العدد: $2x$ قابلا للقسمة على 9

الجواب: $0 \leq x \leq 9$ العدد: $2x$ قابلا للقسمة على 9

اذن: $x + 2 + 5 + 3$ مضاعف للعدد 9 يعني $x + 10$ مضاعف للعدد 9 اذن:

$$x = 8$$

تمرين: ليكن n عنصرا من \mathbb{N}

نضع $x = 2n + 7$ و $y = 4n + 2$.

1. بين أن x عدد فردي و y عدد ومجي.

2. بين أن $(x + y)$ مضاعف للعدد 3.

الجواب (1): لدينا $x = 2n + 7$ أي أن: $x = 2(n+3) + 1$

و بالتالي x عدد فردي لأن: $x = 2k + 1$ حيث: $k = n + 3$

و لدينا $y = 4n + 2$ أي أن $y = 2(2n + 1)$

و بالتالي y عدد زوجي لأن: $y = 2k$ حيث: $k = 2n + 1$

(2) لدينا $x + y = 2n + 7 + 4n + 2 = 6n + 9$ أي أن: $x + y = 3(2n + 3)$

و بالتالي $x + y = 3(2n + 3)$ اذن $x + y$ مضاعف للعدد 3.

IV. مصاديق قابلية القسمة على: 2 و 3 و 4 و 5 و 9

خاصية: ليكن n عددا صحيحا طبيعيا. يكون العدد n قابلا للقسمة:

على 2: إذا كان رقم وحداته هو: 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8.

على 3: إذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 3.

على 4: إذا كان رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب عددا مضاعفا للعدد 4.

على 5: إذا كان رقم وحداته هو 0 أو 5.

على 9: إذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 9.

أمثلة: العدد 4752 يقبل القسمة على 5 لأن رقم وحداته هو 5.

العدد 4725 يقبل القسمة على 3 و 9. لأن العدد $4725 = (4+7+2+5) = 18$ مضاعف للعدد 3 و مضاعف للعدد 9.

العدد 1628 مضاعف للعدد 2 لأن رقم وحداته هو 8.

العدد 1628 مضاعف للعدد 4 لأن رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب العدد 28 و هو مضاعف للعدد 4.

تمرين: أدرس قابلية قسمة العدد 3611790 على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.

أدرس قابلية قسمة الأعداد: 120052005 و 1001001 و 79541 و 19350 و 3140 و 3752 و 3333426 و 145610 و 200070 على 3 و 9.

الجواب: بما أن رقم وحدات العدد 3611790 هو 0، فإن 3611790 يقبل القسمة على 2 و 5.

العدد 90 لا يقبل القسمة على 4. واذن العدد 3611790 لا يقبل القسمة على 4.

مجموع أرقام العدد 3611790 هو $27 = (0+9+7+1+6+3) = 27$ و $27 = 3 \times 9$ و $27 = 3 \times 9$ مضاعف للعدد 3. إذن 3611790 يقبل القسمة على 3.

و بما أن 27 مضاعف للعدد 9 فإن 3611790 يقبل القسمة على 9.

هل العدد: 120052005 قابل للقسمة على 3؟ نعم مجموع أرقامه هو 15 اذن

يقبل القسمة على 3. بالمثل 1001001

هل الأعداد: 79541 و 3140 و 3752 قابلة للقسمة على 3؟ لا لأن مجموع

الأرقام عدد لا يقبل القسمة على 3

الأعداد الأولية و التفكيك إلى جداء عوامل أولية

تعريف: عدد أولي هو كل عدد صحيح طبيعي a يقبل قاسمين فقط هما العدد 1 و العدد a .

مثال: الأعداد الأولية الأصغر من 30 هي 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29.

خاصية: نقبل أن كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم و يخالف 1 يكتب على شكل

عوامل جداء عوامل أولية.

مثال: لدينا: $640 = 64 \times 10$ أي $640 = 8^2 \times 2 \times 5$ إذن:

$$640 = (2^3)^2 \times 2 \times 5$$

$a + b = 2 \times k + 1 + 2 \times k' + 1 = 2 \times (k + k' + 1) = 2 \times k''$

$$k'' = k + k' + 1$$

وبالتالي: $a + b$ عدد زوجي

(3) $a = 2 \times k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

$k' = 2k^2$ حيث $a^2 = (2 \times k)^2 = 4 \times k^2 = 2 \times 2 \times k^2 = 2 \times k'$

وبالتالي: a^2 عدد زوجي

(4) $a = 2 \times k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

$a^2 = (2 \times k + 1)^2 = (2 \times k)^2 + 2 \times 2 \times k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$k' = 2k^2 + 2k$ حيث $a^2 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1 = 2 \times k' + 1$

وبالتالي: a^2 عدد فردي

(5) معطيات a^2 عدد فردي

نبين أن a عدد فردي

نفترض أن a عدد زوجي اذن حسب النتيجة السابقة فإن a^2 عدد زوجي ولكن

حسب المعطيات a^2 عدد فردي وبالتالي افتراضنا كان خاطئا أي أنه a عدد فردي

III. قواسم عدد و مضاعفات عدد و القاسم المشترك

الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر:

نشاط:

• حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6

• حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد 9

• حدد أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين 6 و 9

الجواب:

• المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6 هي 0 و 6 و 12 و 18 و 24 و 30 و 36 و

42 و 48 و 54

• المضاعفات العشرة الأولى للعدد 9 هي 0 و 9 و 18 و 27 و 36 و 45 و 54 و

63 و 72 و 81

• 18 هو أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين 6 و 9

و يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين 6 و 9. و نرمز له بالرمز:

$$PPCM(6;9) = 18$$

تعريف 1: a و b عنصرا من \mathbb{N} . نقول ان a مضاعف للعدد b إذا وجد

عدد صحيح طبيعي n بحيث $a = bn$.

مثال: ادينا: $145 = 5 \times 29$ اذن: 145 مضاعف للعدد 5 لأنه.....

تعريف 2: ليكن a و b عنصرا من \mathbb{N} . أصغر مضاعف مشترك غير منعدم

للعددين a و b يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b . و نرمز له

بالرمز $PPCM(a;b)$.

مثال: مضاعفات العدد 12 هي 0 و 12 و 24 و 36 و 48 و 60 و 72 و.....

مضاعفات العدد 8 هي: 0 و 8 و 16 و 24 و 32 و 40 و 48 و..... إذن:

$$PPCM(12;8) = 24$$

تمرين: حدد مضاعفات العدد 9 المحصورة بين 23 و 59

الجواب: لدينا مضاعفات العدد 9 تكتب على الشكل $9n$ حيث n عنصر من \mathbb{N} .

مضاعفات 9 المحصورة بين 23 و 59 هي الأعداد التي تكتب على شكل $9n$ بحيث

n من \mathbb{N} و المحصورة بين 23 و 59 الحالات الممكنة هي: 3×9 و 4×9 و

5×9 و 6×9 . أي القيم الممكنة للعدد n هي: 3 و 4 و 5 و 6.

و بالتالي المضاعفات التي نبحث عنها هي: 27 و 36 و 45 و 54.

تعريف 2: a و b عنصرا من \mathbb{N} .

نقول ان b قاسم للعدد a إذا وجد عدد صحيح طبيعي n بحيث $a = bn$.

مثال: ادينا: $145 = 5 \times 29$

إذن: - العدد 145 مضاعف للعددين 5 و 29.

- العددان 5 و 29 هما قاسمان للعدد 145.

ملحوظة: العدد 0 مضاعف لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.

العدد 1 قاسم لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.

تعريف 2: ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين.

أكبر قاسم مشترك للعددين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

و يرمز له بالرمز $PGCD(a;b)$.

مثال: قواسم العدد 12 هي: 1 و 2 و 3 و 4 و 6 و 12. و قواسم العدد 15 هي: 1

و 3 و 5 و 15. إذن: $PGCD(12;15) = 3$

$$640 = 2^7 \times 5$$

و منه: العوامل المكونة لهذا الجداء هي الأعداد الأولية 2 و 5.

تقنية التفكيك: لتفكيك عدد a الى جداء عوامل أولية نأخذ أصغر عدد أولي يقسمه وننجز القسمة فنحصل على خارج b فنأخذ أصغر عدد أولي يقسم b وننجز القسمة فنحصل على خارج c فنتابع عملية القسمة حتى نحصل على خارج يساوي 1 و العدد a سيكون هو جداء جميع الأعداد الأولية التي قسمنا عليها

مثال: فكك العدد 1344 الى جداء عوامل أولية **الجواب:** $1344 = 2^6 \times 3 \times 7$

تمرين: فكك العدد 60 الى جداء عوامل أولية ثم استنتج جميع قواسم العدد 60

الجواب: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ اذن القواسم هم: 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 10 و 12 و 15 و 30 و 60

تمرين: حدد جميع قواسم العدد 12 ثم حدد جميع قواسم العدد 15 ثم حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 12 و 15
الجواب: قواسم العدد 9 هم: 1 و 3 و 9 : قواسم العدد 16 هم: 1 و 2 و 4 و 8 و 16 اذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 9 و 16 هو 1 و منه فان 9 و 16 أوليين فيما بينهما

تمرين: هل العدد 1004001 عدد أولي؟

لدينا: مجموع أرقام العدد 1004001 هو 6, و العدد 6 مضاعف للعدد 3.

إذن العدد 1004001 يقبل القسمة على 3.

و بالتالي العدد 1004001 ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).

تمرين: حدد الأعداد الأولية من بين الأعداد التالية: 0 و 1 و 2 و 17 و 21 و 41 و 87 و 105 و 239 و 2787 و 191 و 1004001

الجواب: 0 ليس بعدد أولي لأن كل الأعداد تقسم 0 و 1 ليس بعدد أولي لأن له قاسم وحيد هو 1 و 2 عدد أولي لأن له قاسمين فقط

و 17 عدد أولي لأن له قاسمين فقط و 21 ليس بعدد أولي لأن: $21 = 7 \times 3$ و 41 عدد أولي لأن له قاسمين فقط و 87 ليس بعدد أولي لأن: $87 = 29 \times 3$ و 105 ليس بعدد أولي لأن: $105 = 5 \times 21$

هل العدد 239 أولي؟ نستعمل تقنية: نبحث عن الأعداد الأولية p التي تحقق: $p^2 < 239$ وهي: 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 ولا يوجد أي واحد منهم قاسم للعدد 239

اذن العدد 239 أولي

2787 ليس بعدد أولي لأنه يقبل القسمة على 3 (مجموع أرقامه 24)

لدينا: مجموع أرقام العدد 1004001 هو 6, و العدد 6 مضاعف للعدد 3.

إذن العدد 1004001 يقبل القسمة على 3. و بالتالي العدد 1004001 ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).

هل العدد 191 أولي؟ نستعمل تقنية: نبحث عن الأعداد الأولية p التي تحقق: $p^2 < 191$ وهي: 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 ولا يوجد أي واحد منهم قاسم للعدد 191

اذن العدد 191 أولي

VI. القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر:

خاصية 1: القاسم المشترك الأكبر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة مرفوعة الى أصغر أس

خاصية 2: المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو جداء العوامل الأولية المشتركة والغير المشتركة مرفوعة الى أكبر أس

تمرين: فكك الأعداد: 220 و 798 الى جداء عوامل أولية

حدد: $PGCD(220;798)$ و $PPCM(220;798)$ و $PPCM(1650;5292)$

الجواب: $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ و $798 = 2 \times 3 \times 7 \times 19$ اذن: $2^1 = 2$ و $PGCD(220;798) = 2^1 = 2$ و $PPCM(220;798) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 19 = 87780$