

القدرات المنتظرة

- * التعرف على تقايس وتشابه الأشكال استعمال الإزاحة و التحاكي و التماثل.
- * استعمال الإزاحة و التحاكي و التماثل في حل مسائل هندسية.

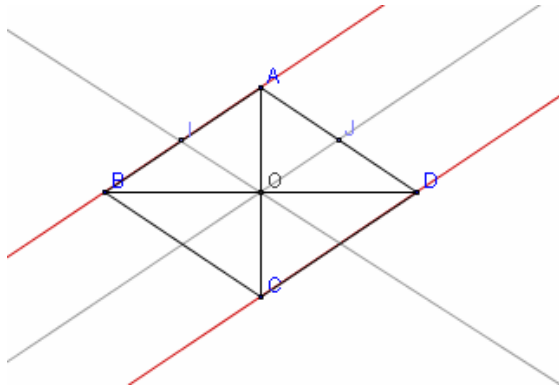
I – التماثل المحوري – التماثل المركزي – الإزاحة

1- أنشطة:

ليكن $ABCD$ معين مركزه O ، و I و J منتصفي $[AB]$ و $[AD]$

- 1- أنشئ الشكل
- 2- حدد مماثلة كل من A و B و O بالنسبة للنقطة O على التوالي استنتج مماثل (AB) بالنسبة لـ O
- 3- حدد مماثلة كل من B و O و I بالنسبة للمستقيم (AC) على التوالي استنتج مماثل (IO) بالنسبة لـ (AC)
- 4- حدد صورة A بالإزاحة ذات المتجهة \overrightarrow{BC}
- حدد صورة B بالإزاحة ذات المتجهة \overrightarrow{IJ}
- حدد صورة $[BO]$ بالإزاحة ذات المتجهة \overrightarrow{IJ}

1- الشكل



- 2- نحدد مماثلة كل من A و B و O بالنسبة للنقطة O على التوالي و نستنتج مماثل (AB) بالنسبة لـ O

* مماثل O بالنسبة لـ O هي نفسها

* بما أن O منتصف القطعتان $[AC]$ و $[BD]$ فإن C و

D مماثلًا A و B على التوالي بالنسبة لـ O

و منه مماثل (AB) بالنسبة لـ O هو المستقيم (DC)

- 3- نحدد مماثلة كل من B و O و I بالنسبة للمستقيم (AC) على التوالي و نستنتج مماثل (IO) بالنسبة لـ (AC)

* بما أن $ABCD$ معين فإن (AC) واسط $[BD]$ و منه مماثل B بالنسبة للمستقيم (AC) هو D

* لدينا $O \in (AC)$ و منه مماثل O بالنسبة للمستقيم (AC) هي نفسها

* ليكن $S_{(AC)}$ التماثل المحوري الذي محوره (AC)

تذكير: $S_{(AC)}(M) = M'$ تقرأ M' مماثل M بالنسبة للمستقيم (AC)

بما أن $S_{(AC)}(A) = A$ و $S_{(AC)}(B) = D$ فإن مماثل $[AB]$ هو $[AD]$ بالنسبة للمستقيم

و نعلم أن مماثل منتصف قطعة هو منتصف مماثل القطعة

و حيث أن I و J منتصفا $[AB]$ و $[AD]$ على التوالي فإن $S_{(AC)}(I) = J$

* نستنتج مماثل (IO) بالنسبة لـ (AC)

لدينا $S_{(AC)}(O) = O$ و $S_{(AC)}(I) = J$ و منه مماثل (IO) بالنسبة لـ (AC) هو المستقيم (JO)

- 4- نحدد صورة A بالإزاحة ذات المتجهة \overrightarrow{BC}

بما أن $ABCD$ معين فإن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

و منه صورة A هي النقطة D بالإزاحة ذات المتجهة \overrightarrow{BC} نكتب $t_{\overrightarrow{BC}}(A) = D$

* نحدد صورة B بالإزاحة ذات المتجهة \overrightarrow{IJ}



في المثلث ABD لدينا I و J منتصفا $[AB]$ و $[AD]$ ومنه $\overline{IJ} = \frac{1}{2}\overline{BD}$

و حيث أن O منتصف $[BD]$ فإن $\overline{OD} = \overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ وبالتالي $\overline{BO} = \overline{IJ}$ إذن $t_{\overline{IJ}}(B) = O$

* نحدد صورة $[BO]$ بالإزاحة ذات المتجهة \overline{IJ}

مما سبق نستنتج أن $\overline{OD} = \overline{IJ}$ إذن $t_{\overline{IJ}}(O) = D$

و حيث أن $t_{\overline{IJ}}(B) = O$ فإن صورة $[BO]$ هي $[OD]$ بالإزاحة ذات المتجهة \overline{IJ}

2- تعاريف و مصطلحات

أ- المماثل المركزي

لتكن I نقطة معلومة و M و M' نقطتين من المستوى
 * نقول إن النقطة M' هي مماثلة للنقطة M بالنسبة للنقطة I إذا و فقط إذا تحقق ما يلي:
 - إذا كان $M = I$ فإن $M' = I$
 - إذا كان $M \neq I$ فإن I منتصف $[MM']$
 * العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى (P) بمماثلتها M' بالنسبة للنقطة I تسمى التماثل المركزي الذي مركزه I نرسم له بالرمز S_I
 نقول إن النقطة M' صورة M بالتماثل المركزي S_I نكتب $S_I(M) = M'$ أو $S_I: M \rightarrow M'$
 نقول كذلك إن S_I يحول M إلى M' لذا نقول إن التماثل المركزي S_I تحويل في المستوى.

ملاحظات:



$$S_I(M) = M' \quad * \quad \overline{IM'} = -\overline{IM}$$

$$S_I(I) = I \quad * \quad \text{نقول إن النقطة } I \text{ صامدة بالتماثل المركزي } S_I$$

$$S_I(M') = M \quad * \quad \text{تكافئ } S_I(M) = M'$$

ب- المماثل المحوري

ليكن (D) مستقيما و M و M' نقطتين من المستوى
 * نقول إن النقطة M' هي مماثلة للنقطة M بالنسبة للمستقيم (D) إذا و فقط إذا تحقق ما يلي:
 - إذا كان $M \in (D)$ فإن $M' = M$
 - إذا كان $M \notin (D)$ فإن (D) واسط $[MM']$
 * العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى (P) بمماثلتها M' بالنسبة للمستقيم (D) تسمى التماثل المحوري الذي محوره (D) نرسم له بالرمز $S_{(D)}$
 نقول إن النقطة M' صورة M بالتماثل المحوري $S_{(D)}$ نكتب $S_{(D)}(M) = M'$ أو $S_{(D)}: M \rightarrow M'$
 نقول كذلك إن $S_{(D)}$ يحول M إلى M' لذا نقول إن التماثل المحوري $S_{(D)}$ تحويل في المستوى.

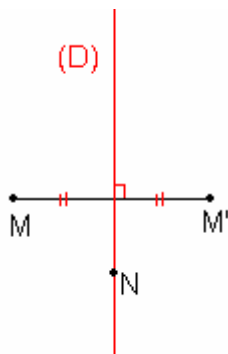
ملاحظة:

$$S_{(D)}(M) = M' \quad * \quad \text{يكافئ } (D) \text{ واسط } [MM']$$

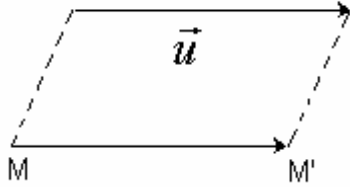
$$S_{(D)}(N) = N \quad * \quad \text{لكل نقطة } N \text{ من } (D)$$

نقول إن جميع نقط المستقيم (D) صامدة بالتماثل المحوري $S_{(D)}$

$$S_{(D)}(M') = M \quad * \quad \text{تكافئ } S_{(D)}(M) = M'$$



ليكن \vec{u} متجهة و M و M' نقطتين من المستوى
 * نقول إن النقطة M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة \vec{u} إذا و فقط إذا $\overline{MM'} = \vec{u}$
 * العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى (P) بصورتها M' بالإزاحة ذات المتجهة \vec{u} تسمى الإزاحة ذات المتجهة \vec{u} نرمز لها $t_{\vec{u}}$
 نكتب $t_{\vec{u}}(M) = M'$ أو $t_{\vec{u}} : M \rightarrow M'$
 نقول كذلك إن $t_{\vec{u}}$ يحول M إلى M' لذا نقول إن الإزاحة $t_{\vec{u}}$ تحويل في المستوى.



ملاحظة:

$$\begin{aligned} \overline{MM'} &= \vec{u} \text{ يكافئ } t_{\vec{u}}(M) = M' * \\ t_{\vec{0}}(M) &= M \text{ لكل } M \text{ من المستوى} * \\ \overline{MM} &= \vec{0} \text{ تكافئ } t_{\vec{u}}(M) = M * \\ t_{-\vec{u}}(M') &= M \text{ يكافئ } t_{\vec{u}}(M) = M' * \end{aligned}$$

2- الخاصية المميزة للإزاحة

*- لتكن M و N و M' و N' نقط من المستوى (P) حيث $t_{\vec{u}}(M) = M'$; $t_{\vec{u}}(N) = N'$
 ومنه $\overline{NN'} = \vec{u}$; $\overline{MM'} = \vec{u}$ و بالتالي $\overline{MM'} = \overline{NN'}$ إذن $\overline{MN} = \overline{M'N'}$

إذا كان $t_{\vec{u}}(M) = M'$ و $t_{\vec{u}}(N) = N'$ فإن $\overline{MN} = \overline{M'N'}$

*- ليكن T التحويل حيث لكل نقطتين M و N من المستوى حيث $\overline{MN} = \overline{M'N'}$ و
 $T(M) = M'$; $T(N) = N'$

نحدد طبيعة T
 لتكن A نقطة معلومة و M نقطة ما من المستوى
 لنعتبر $T(A) = A'$

$$\begin{aligned} \overline{MA} &= \overline{M'A'} \text{ تكافئ } T(M) = M' \\ \overline{MM'} &= \overline{AA'} \text{ تكافئ} \\ t_{\overline{AA'}}(M) &= M' \text{ تكافئ} \end{aligned}$$

$$\text{إذن } T = t_{\overline{AA'}}$$

الخاصية المميزة

ليكن T تحويل في المستوى
 يكون T إزاحة إذا و فقط إذا كانت T تحول كل نقطتين M و N من المستوى إلى نقطتين M' و N' حيث
 $\overline{MN} = \overline{M'N'}$

3- الاستقامية و التحويلات نشاط

لتكن A ; B ; C ; D نقط من المستوى حيث $\overline{CD} = \alpha \overline{AB}$. نعتبر A' ; B' ; C' ; D'
 صورها على التوالي بتحويل T
 نبين أن $\overline{C'D'} = \alpha \overline{A'B'}$ في الحالتين $T = S_{\Omega}$ و $T = t_{\vec{u}}$
 *- الحالة $T = t_{\vec{u}}$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \text{ ومنه } T(A) = A' ; T(B) = B'$$

$$\overline{CD} = \overline{C'D'} \text{ ومنه } T(C) = C' ; T(D) = D'$$

وحيث أن $\overline{CD} = \alpha \overline{AB}$ فإن $\overline{C'D'} = \alpha \overline{A'B'}$
 *- الحالة $T = S_{\Omega}$

$$\overline{AB} = -\overline{A'B'} \text{ و بالتالي } \overline{\Omega A} = -\overline{\Omega A'} \text{ و } \overline{\Omega B} = -\overline{\Omega B'} \text{ ومنه } T(A) = A' ; T(B) = B'$$

$$\overline{CD} = -\overline{C'D'} \text{ و بالتالي } \overline{\Omega D} = -\overline{\Omega D'} \text{ و } \overline{\Omega C} = -\overline{\Omega C'} \text{ ومنه } T(C) = C' ; T(D) = D'$$

وحيث أن $\overline{C'D'} = \alpha \overline{A'B'}$ فان $\overline{CD} = \alpha \overline{AB}$
 نقل الحالة $T = S_{(D)}$

خاصية

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة - التماثل المركزي - التماثل المحوري
 $A ; B ; C ; D$ نقط من المستوى
 إذا كان T يحول النقط $A ; B ; C ; D$ بالتوالي إلى النقط $A' ; B' ; C' ; D'$ حيث $\overline{CD} = \alpha \overline{AB}$
 فان $\overline{C'D'} = \alpha \overline{A'B'}$
 نعبّر عن هذا بقولنا الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحويلات تحافظ على معامل استقامية متجهتين

نتيجة

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة - التماثل المركزي - التماثل المحوري
 $A ; B ; C$ نقط مستقيمة حيث $A \neq B$ ومنه يوجد α حيث $\overline{AC} = \alpha \overline{AB}$
 $A' ; B' ; C'$ صورها بالتحويل T ومنه $\overline{A'C'} = \alpha \overline{A'B'}$ إذن $A' ; B' ; C'$ مستقيمة.

الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحافظ على استقامة النقط

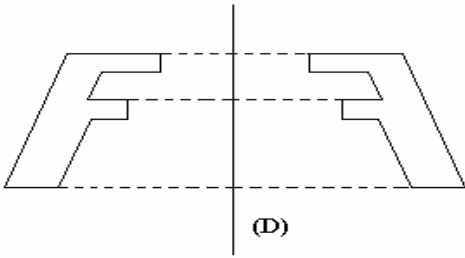
4- التحويل و المسافات خاصية

الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحويلات تحافظ على المسافة أي إذا كان A' و B' صورتي A و B
 بأحد هذه التحويلات فان $A'B' = AB$

5- صورة أشكال بتحويل : الإزاحة - التماثل المركزي - التماثل المحوري

أ- أنشطة

ننشئ صورة الشكل (F) بالتحويلات الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري



تعريف

ليكن (F) شكلا
 مجموعة صور نقط الشكل (F) بتحويل T تكون شكلا (F') يسمى صورة شكل (F) بالتحويل T
 نكتب $T((F)) = (F')$

خاصية

صورة تقاطع شكلين (F_1) و (F_2) بتحويل T هو تقاطع (F_1') و (F_2') صورتي هذين الشكلين بهذا التحويل
 $T((F_1) \cap (F_2)) = T((F_1)) \cap T((F_2))$

ب- صور أشكال اعتيادية بتحويل صورة مستقيم - صورة نصف مستقيم - صورة قطعة

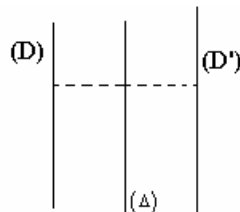
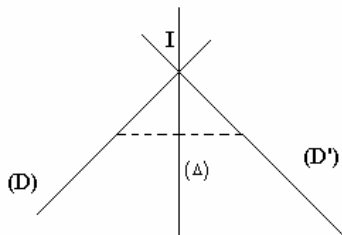
ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة - التماثل المركزي - التماثل المحوري
 إذا كان $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ فان $T((AB)) = (A'B')$ و $T([AB]) = [A'B']$

أ- صورة مستقيم

*- صورة مستقيم (D) بتماثل محوري $S_{(\Delta)}$ هو مستقيم (D')

+ إذا كان (D) يقطع (Δ) في نقطة I فان (D')

يقطع (Δ) في نقطة I

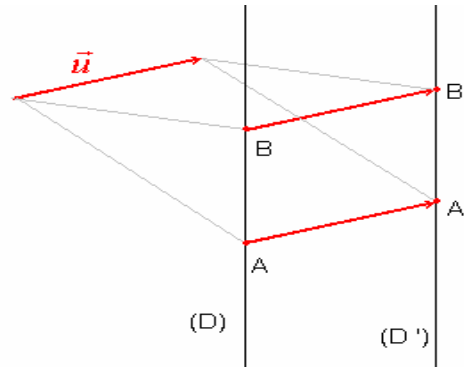
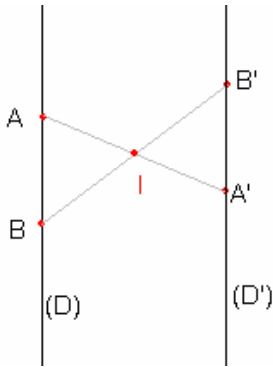


+ إذا كان $(D) \parallel (\Delta)$ فان $(D') \parallel (\Delta)$



+ إذا كان $(D) \perp (\Delta)$ فان $(D) = (D')$

*- صورة مستقيم (D) بإزاحة أو تماثل مركزي هو مستقيم (D') يوازيه

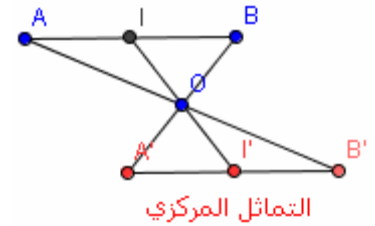
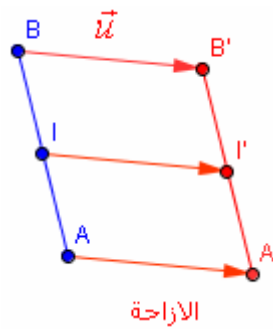
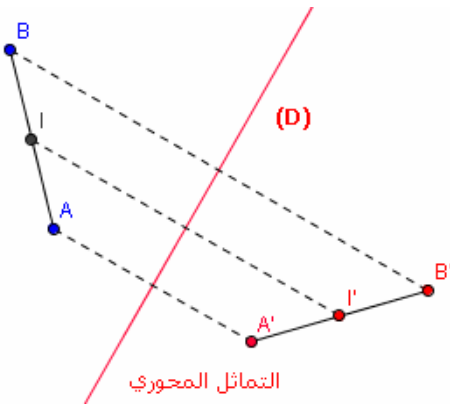


ملاحظة

*- صورة مستقيم (D) بتماثل مركزي مركزه ينتمي إلى (D) هو المستقيم نفسه

*- صورة مستقيم (D) بإزاحة متجهتها موجهة لـ (D) هو المستقيم نفسه

ب- صورة منتصف قطعة

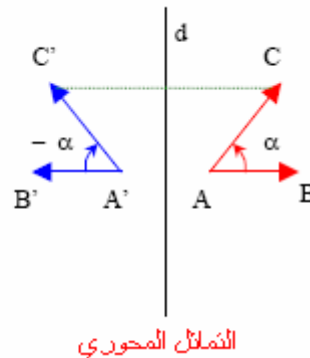
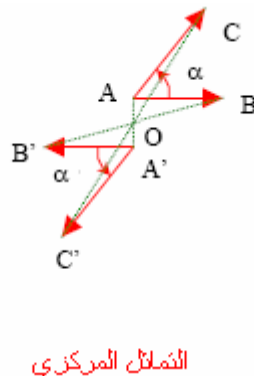
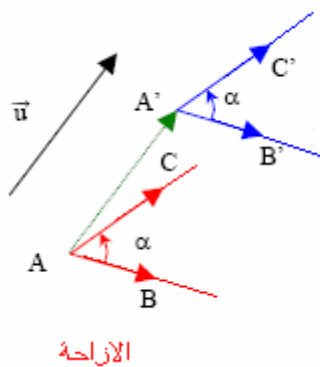


ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة - التماثل المركزي - التماثل المحوري
إذا كان I منتصف $[AB]$ و $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ و $T(I) = I'$ فان I' منتصف $[A'B']$

ج- صورة دائرة

صورة دائرة مركزها O و شعاعها r بإزاحة أو تماثل محوري أو تماثل مركزي هو دائرة مركزها O' صورة O و شعاعها r

د- صورة زاوية



ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة - التماثل المركزي - التماثل المحوري

إذا كان $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ و $T(C) = C'$ فإن $T(\widehat{BAC}) = \widehat{B'A'C'}$ و $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحافظ على قياس الزوايا الهندسية

6- صورة مثلث

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة - التماثل المركزي - التماثل المحوري
إذا كان $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ و $T(C) = C'$ فإن صورة المثلث ABC هو المثلث $A'B'C'$ الذي يقايسه

7- التحويلات و التوازي و التعامد خاصية

الإزاحة التماثل المركزي و التماثل المحوري تحويلات تحافظ على التعامد و التوازي

8- محاور تماثل شكل - مراكز تماثل شكل أ- تعريف

نقول إن المستقيم (D) محور تماثل شكل (F) إذا و فقط إذا كان $S_{(D)}((F)) = (F)$

أمثلة: + محاور تماثل مستقيم هو المستقيم نفسه و جميع المستقيمات العمودية عليه.
+ محاور تماثل دائرة هي حاملات أقطارها
ب تعريف

نقول إن النقطة I مركز تماثل شكل (F) إذا و فقط إذا كان $S_I((F)) = (F)$

أمثلة: + مركز تماثل مستقيم جميع نقطه
+ مركز تماثل متوازي الأضلاع هو مركزه

II - التحاكي 1- نشاط

لتكن O و A و B نقط من المستوى
أنشئ O' و A' و B' حيث $\overline{OA'} = -2\overline{OA}$ و $\overline{OB'} = -2\overline{OB}$
نقول إن A' و B' صورتي A و B على التوالي بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته 2-
أنشئ M' صورة M بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته 2-
بين أن $\overline{A'B'} = -2\overline{AB}$ و استنتج أن $(AB) \parallel (A'B')$
ما هو الوضع النسبي للمستقيمين (AM) و $(A'M')$
2- تعريف

لتكن I نقطة معلومة من المستوى (P) و k عددا حقيقيا غير منعدم
العلاقة التي تربط النقطة M بالنقطة M' حيث $\overline{IM'} = k\overline{IM}$ تسمى التحاكي الذي مركزه I و نسبته k
ونرمز له بالرمز $h(I; k)$ أو h
نقول إن النقطة M' صورة النقطة M بالتحاكي M و نكتب $h(M) = M'$ أو $h: M \rightarrow M'$
نقول كذلك h يحول M إلى M'
التحاكي h تحويل في المستوى

مثال

أ- h تحاك مركز I و نسبته 3 أنشئ M' صورة M بالتحاكي h



ب- h تحاك مركز I و نسبته $\frac{-1}{2}$ أنشئ M' صورة M بالتحاكي h



ملاحظات

ليكن $h(I; k)$ تحاك حيث $k \neq 0$
* - إذا كان $k = 1$ فإن $h(I; 1)$ يحول كل نقطة إلى نفسها
- إذا كان $|k| > 1$ نقول إن $h(I; k)$ " تكبير "



- إذا كان $|k| < 1$ نقول إن $h(I; k)$ " تصغير "

*- إذا كان $h(I; k)$ يحول M إلى M' فإن I و M و M' نقط مستقيمة

* إذا كان $h(M) = M'$ فإن $\overline{IM'} = k\overline{IM}$ أي $\overline{IM'} = \frac{1}{k}\overline{IM}$ و بالتالي M صورة M' بالتحاكي الذي مركزه I

و نسبته $\frac{1}{k}$

* $h(I) = I$ نقول إن I بالتحاكي $h(I; k)$

- مركز التحاكي هو النقطة الوحيدة الصامدة بهذا التحاكي

2- خاصيات

أ- أنشطة

نشاط 1

ليكن $h(I; k)$ تحاك حيث $k \neq 0$ و M و N و M' و N' حيث $h(M) = M'$ و $h(N) = N'$

1- بين أن $\overline{M'N'} = k\overline{MN}$ و أن $M'N' = |k|MN$

2- بين أن إذا كان $M \neq N$ فإن $M' \neq N'$ و $(MN) \parallel (M'N')$

نشاط 2

ليكن $\mathbb{R}^* - \{1\}$ و $k \in \mathbb{R}^*$ و M و N و M' و N' نقط حيث $\overline{M'N'} = k\overline{MN}$

1- بين أن المستقيمين (MM') و (NN') متقاطعين في نقطة I

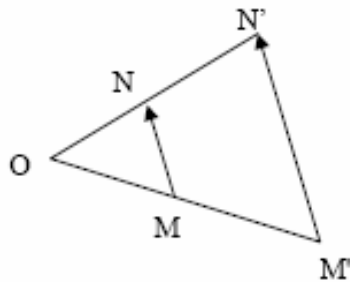
2- بين أن $\overline{IM'} = k\overline{IM}$ و $\overline{IN'} = k\overline{IN}$ و استنتج أنه يوجد تحاك يحول M و N على التوالي إلى M' و N'

نشاط 3

لتكن A ; B ; C ; D نقط من المستوى حيث $\overline{CD} = \alpha\overline{AB}$.

نعتبر A' ; B' ; C' ; D' صورها على التوالي بالتحاكي $h(I; k)$ حيث $k \neq 0$

بين أن $\overline{C'D'} = \alpha\overline{A'B'}$



ب- الخاصية المميزة

ليكن T تحويل في المستوى و k عدد حقيقي غير منعدم يخالف 1 يكون T تحاك نسبته k إذا و فقط إذا كانت T تحول كل نقطتين M و N من المستوى إلى نقطتين M' و N'

حيث $k\overline{MN} = \overline{M'N'}$

نتيجة

إذا كان M و N من المستوى و كان M' و N' صورتيهما على التوالي بتحاك نسبته k غير منعدمة فإن

$$M'N' = |k|MN$$

ج- خاصية: المحافظة على معامل الاستقامة

لتكن A ; B ; C ; D نقط من المستوى و A' ; B' ; C' ; D' صورها على التوالي

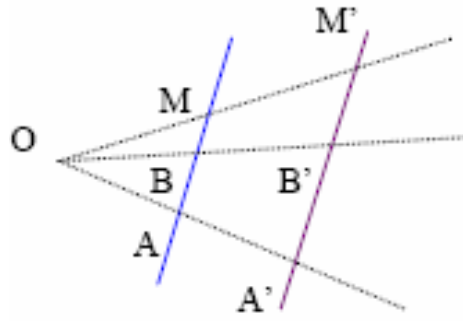
بالتحاكي $h(I; k)$ حيث $k \neq 0$

إذا كان $\overline{CD} = \alpha\overline{AB}$ فإن $\overline{C'D'} = \alpha\overline{A'B'}$

نعتبر عن هذا بقولنا التحاكي يحافظ على معامل استقامية متجهتين

نتيجة

التحاكي يحافظ على استقامية النقط



نتيجة

ليكن h تحاك إذا كان $h(A) = A'$ و $h(B) = B'$ فان $h([AB]) = [A'B']$ و $h([AB]) = [A'B']$ و $h([AB]) = [A'B']$

نتيجة

ليكن h تحاك إذا كان I منتصف $[AB]$ و $h(A) = A'$ و $h(B) = B'$ و $h(I) = I'$ فان I' منتصف $[A'B']$

3- صور بعض الأشكال بتحاك

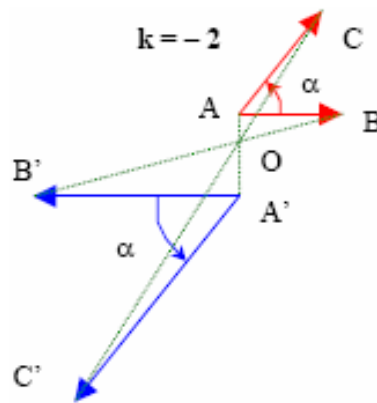
خاصية 1

صورة مستقيم (D) بتحاك هو مستقيم (D') يوازيه

ملاحظة : صورة مستقيم (D) بتحاك مركزه ينتمي إلى (D) هو المستقيم نفسه

خاصية 2

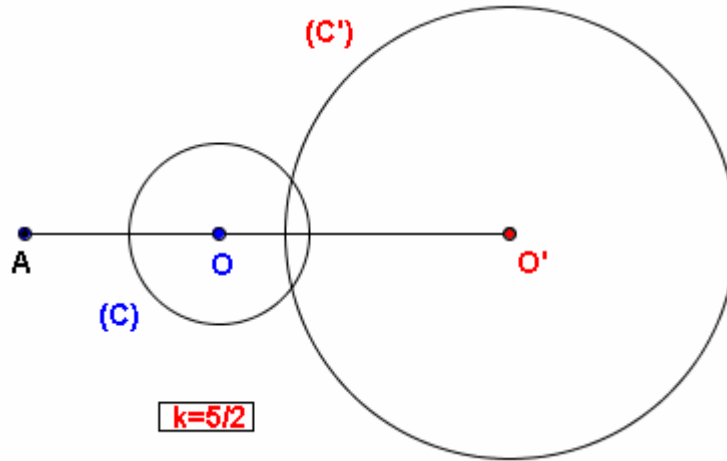
ليكن h إذا كان $h(A) = A'$ و $h(B) = B'$ و $h(C) = C'$ فان $T(\widehat{BAC}) = \widehat{B'A'C'}$ و $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ التحاكي يحافظ على قياس الزوايا الهندسية



خاصية 3

التحاكي يحافظ على التعامد و التوازي أي صورتا مستقيمان متعامدان هما مستقيمان متعامدان صورتا مستقيمان متوازيان هما مستقيمان متوازيان

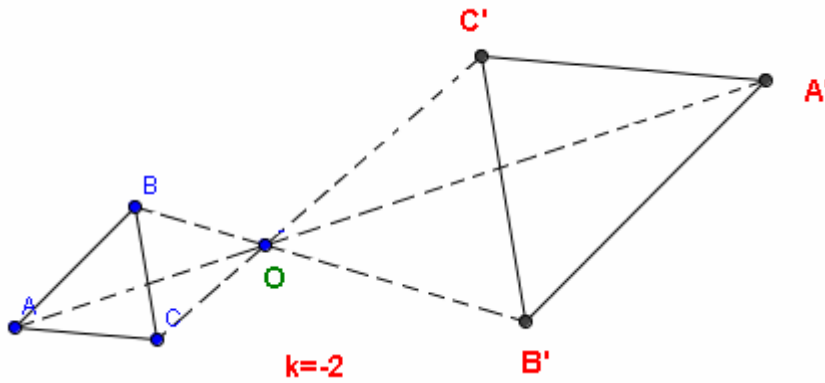
صورة دائرة مركزها O و شعاعها r بتحاك نسبته k هو دائرة مركزها O' صورة O بهذا التحاكي و شعاعها $r|k|$



خاصية 5: صورة مثلث

ليكن h نسبه $k \neq 0$ إذا كان $h(A) = A'$ و $h(B) = B'$ و $h(C) = C'$ فان صورة المثلث ABC هو المثلث $A'B'C'$

ملاحظة و اصطلاح :
إذا كان المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بتحاك نسبه k غير منعدمة فان المثلث ABC صورة المثلث $A'B'C'$ بالتحاكي نسبه $\frac{1}{k}$
نقول إن المثلثين ABC و $B'A'C'$ متحاكيان



خاصية 6

إذا كان المثلثان ABC و $B'A'C'$ متحاكيان فان $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ و $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ و $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ و $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ و $(CB) \parallel (C'B')$ و $(AC) \parallel (A'C')$ و $(AB) \parallel (A'B')$