# الهندسة

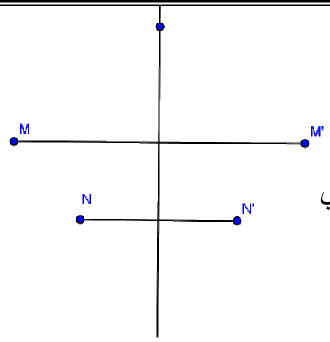
## ملخص لدرس: التحويلات الاعتيادية في المستوى مع تمارين وأمثلة محلولة

### الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| - تذكير: التماثل المحوري، التماثل المركزي، الإزاحة؛<br>- التحاكي؛<br>- الخاصية المميزة لكل من الإزاحة والتحاكي، حالة التماثل المركزي؛<br>- الحفاظ على معامل استقامية متجهتين؛<br>- المسافة والتحويلات السابقة؛<br>- صور بعض الأشكال (قطعة، مستقيم، نصف مستقيم، دائرة، زاوية). | - التعرف على تقايس وتشابه الأشكال باستعمال الإزاحة والتحاكي والتماثل.<br>- استعمال الإزاحة والتحاكي والتماثل في حل مسائل هندسية. | - يتم التذكير بالتماثل المحوري والتماثل المركزي والإزاحة من خلال أنشطة وتمارين وتعريفها متجهيا أو تآلفيا.<br>- يقدم التحاكي من خلال أمثلة وبنفس الطريقة التي **قدمت** به التحويلات السابقة.<br>- تعتبر الصيغ التحليلية لهذه التحويلات خارج المقرر. |

## I. تعاريف:

### 1. التماثل المحوري:



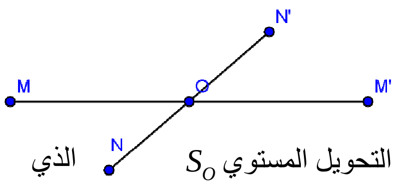

ليكن $(D)$ مستقيما من المستوى.

التماثل المحوري الذي محوره $(D)$ هو التحويل المستوي $S_{(D)}$ الذي يربط كل نقطة من المستوى $(P)$ بالنقطة $M'$ حيث يكون $(D)$ واسطا للقطعة $[MM']$.

ملاحظة: إذا كانت $M$ تنتمي إلى المستقيم $(D)$ فان $S_{(D)}(M)=M$ .

$S_{(D)}(M)=M'$ $\quad$ $S_{(D)}(N)=N'$

### 2. التماثل المركزي



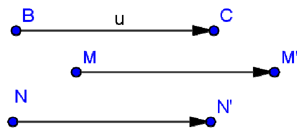

لتكن $O$ نقطة من المستوى $(P)$ . التماثل المركزي الذي مركزه $O$ هو التحويل المستوي $S_O$ الذي يربط كل نقطة $M$ من المستوى $(P)$ بالنقطة $M'$ حيث تكون النقطة $O$ منتصف القطعة $[MM']$.

ملاحظة: $S_O(O)=O$

$S_O(M)=M'$ تعني $O$ منتصف القطعة $[MM']$.

### 3. الإزاحة:

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة من المستوى. الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ هي التحويل المستوي الذي يربط كل نقطة $M$ من المستوى $(P)$ بالنقطة $M'$ حيث $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ .




$t(M)=M'$ و $t(N)=N'$

**تمرين 1:** ليكن $ABCD$ معينا مركزه $O$, و $I$ منتصف $[AB]$ و $J$ منتصف $[AD]$

1) أنشئ الشكل.

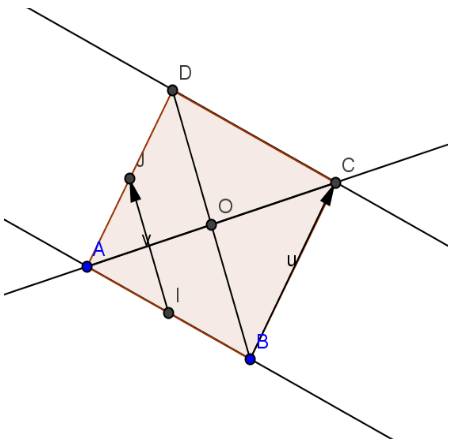
2) حدد $S_O(A)$ و $S_O(B)$ و $S_O(O)$ و $S_O((AB))$

3) $S_{(AC)}(B)$ و $S_{(AC)}(A)$ و $S_{(AC)}(O)$ و $S_{(AC)}([AB])$ و $S_{(AC)}(I)$ و $S_{(AC)}((OI))$

4) حدد $t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ و $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)$ و $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])$

أجوبة :

(1




(2

- $S_O(A)=C$ لأن : $OA=OC$
- $S_O(B)=D$ لأن : $OB=OD$
- $S_O(O)=O$ نقول النقطة $O$ صامدة
- بحث عن $S_O((AB))$: صورة المستقيم $(AB)$

لدينا : $\begin{cases} S_O(A)=C \\ S_O(B)=D \end{cases}$ اذن : $S_O((AB))=(CD)$

نلاحظ أن صورة متقيم بواسطة تماثل مركزي هو مستقيم يوازيه

(3

- $S_{(AC)}(B)=D$ لأن : $(AC)$ واسطا للقطعة $[BD]$.
- $S_{(AC)}(A)=A$ لأن : كل النقط التي تنتمي الى $(AC)$ صامدة
- $S_{(AC)}(O)=O$ لأن : $O\in(AC)$ وكل النقط التي تنتمي الى $(AC)$ صامدة
- $S_{(AC)}([AB])=[AD]$ لأن : $\begin{cases} S_{(AC)}(A)=A \\ S_{(AC)}(B)=D \end{cases}$
- $S_{(AC)}(I)$ ؟؟؟؟؟؟

لدينا $I$ منتصف $[AB]$ و $S_{(AC)}([AB])=[AD]$ اذن $S_{(AC)}(I)$ هو منتصف $[AD]$ أي النقطة $J$ ومنه $S_{(AC)}(I)=J$

- $S_{(AC)}((OI))$ ؟؟؟؟؟

الأستاذ: عثماني نجيب

لدينا $\begin{cases} S_{(AC)}(O)=O \\ S_{(AC)}(I)=J \end{cases}$ إذن $S_{(AC)}((OI))=(OJ)$

(4

• $t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ ????

لدينا $ABCD$ معين إذن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ومنه : $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=D$

• $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)$ ????

نعتبر المثلث : $ABD$ : لدينا $I$ منتصف $[AB]$ و $J$ منتصف $[AD]$ إذن : $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$ ونعلم أن $O$ منتصف $[BD]$

إذن $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}$ ومنه : $2\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{IJ}$ أي : $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$

وبالتالي : $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

• $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])$ ????

لدينا $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ و $O$ منتصف $[BD]$ إذن : $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

ومنه $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{IJ}$ أي : $t_{\overrightarrow{IJ}}(O)=D$ ونعلم أن : $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

إذن : $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])=[DO]$

## 4. التحاكي:

لتكن $\Omega$ نقطة من المستوى و $k$ عددا حقيقيا غير منعدم التحاكي $h$ الذي مركزه $\Omega$ و نسبته $k$ هو التحويل المستوى الذي يربط كل نقطة $M$ من المستوى $(P)$ بالنقطة $M'$ حيث $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$.

<u>ملاحظة:</u> إذا كانت $k=-1$ فان التحويل $h$ هو تماثل مركزي مركزه $\Omega$.

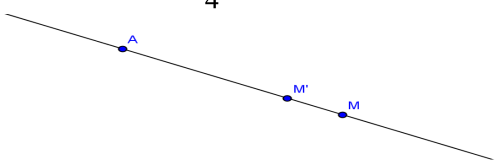
$h(M)=M'$ يعني أن النقط $\Omega$ و $M$ و $M'$ مستقيمية.

$h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$h(N)=N'$ يعني $\overrightarrow{\Omega N'}=k\overrightarrow{\Omega N}$

**<u>تمرين 2:</u>** لتكن $A$ و $M$ نقطتين من المستوى , أرسم النقطة $M'$ صورة النقطة $M$ بالتحاكي $h$ ذا المركز $A$ و نسبته $\frac{3}{4}$

**الجواب :** $h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{AM'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AM}$




**<u>تمرين 3:</u>** عبر عن العلاقة المتجهية : $\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ بتحاك

**الجواب :إذا اعتبرنا** $h$ التحاكي الذي مركزه $I$ و نسبته $k=-\frac{2}{3}$

أي : $h\left(I,-\frac{2}{3}\right)$ فان : $\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ يعني $h(B)=C$

**<u>تمرين4:</u>** حدد نسبة و مركز التحاكي $h$ الذي يحول $A$ إلى $B$ في الحالات التالية :

1. $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ حيث $I$ نقطة معلومة
2. $2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$ حيث $\Omega$ نقطة معلومة
3. $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ حيث $I$ نقطة معلومة

**الأجوبة :** $h(I,k)$ $h(A)=B$ يعني $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IA}$

$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (1

يعني $2\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

يعني $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

يعني $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ ومنه $h\left(I,\frac{1}{3}\right)$

$2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$ (2

يعني $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{AB}$ يعني $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}$

يعني $2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$ يعني $\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$

ومنه $h(\Omega,-1)$

$3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (3

يعني $3\overrightarrow{IA}-5\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$ يعني $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AI}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

يعني $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ يعني $8\overrightarrow{IA}=5\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{IB}=\frac{8}{5}\overrightarrow{IA}$ ومنه $h\left(I,\frac{8}{5}\right)$

## II. الخاصيات المميزة لكل من التحاكي و الازاحة والتماثل المركزي

ليكن $T$ تحويلا اعتياديا في المستوى و $k\in\mathbb{R}^*-\{1\}$

**<u>تمرين 5:</u>** ليكن $h$ التحاكي الذي مركزه $\Omega$ و نسبته $k$ ويحول $M$ إلى $M'$ و يحول $N$ إلى $N'$

بين أن : $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

**الجواب :**

$h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$h(N)=N'$ يعني $\overrightarrow{\Omega N'}=k\overrightarrow{\Omega N}$

$$\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega N'}=-\overrightarrow{\Omega M'}+\overrightarrow{\Omega N'}$$

$$\overrightarrow{M'N'}=-k\overrightarrow{\Omega M}+k\overrightarrow{\Omega N}=k\left(-\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{\Omega N}\right)$$

$$\overrightarrow{M'N'}=k\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega N}\right)=k\overrightarrow{MN}$$

يمكن تعميم النتيجة ونحصل عن الخاصية التالية:

**<u>خاصية:(الخاصية المميزة للتحاكي)</u>**

يكون التحويل $T$ تحاكيا نسبته $k$ اذا وفقط اذا كان : $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$ بحيث : $T(M)=M'$ و $T(N)=N'$

**<u>تمرين 6:</u>** ليكن $t_{\vec{u}}$ الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ بحيث تحول $M$ إلى $M'$ و تحول $N$ إلى $N'$

بين أن : $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

**الجواب :** $t_{\vec{u}}(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ و $t_{\vec{u}}(N)=N'$ يعني $\overrightarrow{NN'}=\vec{u}$

ومنه : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$ إذن : $MM'N'N$ متوازي الأضلاع

وبالتالي: $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

يمكن تعميم النتيجة ونحصل عن الخاصية التالية:

**<u>خاصية:(الخاصية المميزة للازاحة)</u>**

يكون التحويل $T$ ازاحة اذا وفقط اذا كان : $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$ بحيث : $T(M)=M'$ و $T(N)=N'$

ملاحظة:بما أن التماثل المركزي هو تحاكي نسبته $k=-1$ نحصل على الخاصية التالية :

**<u>خاصية:(الخاصية المميزة للتماثل المركزي)</u>**

يكون التحويل $T$ تماثلا مركزيا اذا وفقط اذا كان : $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$ بحيث : $T(M)=M'$ و $T(N)=N'$

## III. خاصيات

نشاط : $h(O;2)$ أرسم $h(M)=M'$ و $h(N)=N'$

ماذا تلاحظ؟

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على المسافة باستثناء التحاكي الذي نسبته $k$ بحيث $|k|\neq 1$.

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على المنتصف.

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على الاستقامية و التوازي و التعامد و قياس الزوايا الهندسية.

## IV. صور بعض الأشكال:

❖ صورة مستقيم $(\Delta)$ بواسطة ازاحة أو تماثل مركزي أو تحاك هو مستقيم $(\Delta')$ يوازي $(\Delta)$.

❖ صورة قطعة $[AB]$ هي قطعة $[A'B']$ تقايس $[AB]$ إذا كان التحويل إزاحة أو تماثلا. أما إذا كان التحويل تحاكيا نسبته $k$ فان $A'B'=|k|AB$ .

❖ صورة دائرة $(E)$ ذات المركز $c$ و الشعاع $r$ هي دائرة مركزها $c'$ صورة $c$ و شعاعها $r$ إذا كان التحويل إزاحة أو تماثلا و شعاعها $|k|\cdot r$ . إذا كان التحويل تحاكيا نسبته $k$ .

❖ صورة الزاوية $[\widehat{AOB}]$ هي الزاوية $[\widehat{A'O'B'}]$

$\widehat{A'O'B'}=\widehat{AOB}$

حيث $A'$ و $B'$ و $O'$ هي صور $A$ و $B$ و $O$ على التوالي بالتحويل.

**تمرين 7:** ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع و $I$ و $J$ نقطتين معرفتين ب $\vec{CI}=\frac{2}{3}\vec{CB}$ , $\vec{IJ}=\vec{DC}$ .

1) أنشئ الشكل.

2) بين أن $(BJ)$ صورة $(AI)$ بالإزاحة $t_{\vec{AB}}$. وماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين $(BJ)$ و $(AI)$؟

3) نعتبر التحاكي $h$ ذا المركز $I$ و الذي يحاول $B$ إلى $C$ .

أ) بين أن $h((AB))=(CD)$ .

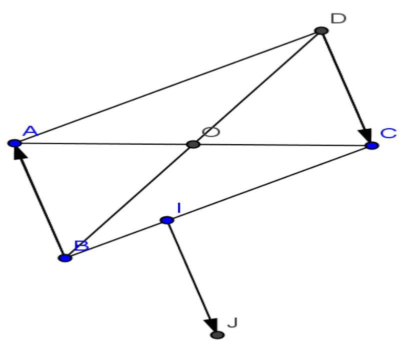
ب) أثبت أن نسبة $h$ هي العدد -2.

4) لتكن $K$ نقطة حيث $\vec{KI}=2\vec{AB}$ .

أ) بين أن $h(J)=K$ .

ب) أثبت أن $AI=\frac{1}{2}CK$ .

**الأجوبة:** 1)




2) نبين أن : $t_{\vec{AB}}(I)=J$ : ؟؟؟؟؟

لدينا $ABCD$ متوازي الأضلاع اذن $\vec{DC}=\vec{AB}$

ولدينا حسب المعطيات : $\vec{IJ}=\vec{DC}$

ومنه $\vec{IJ}=\vec{AB}$ أي: $t_{\vec{AB}}(I)=J$

ولدينا : $\vec{AB}=\vec{AB}$ اذن $t_{\vec{AB}}(A)=B$

لدينا اذن : $\begin{cases} t_{\vec{AB}}(I)=J \\ t_{\vec{AB}}(A)=B \end{cases}$ وبالتالي : $t_{\vec{AB}}((AI))=(BJ)$

❖ الاستنتاج: نعلم أن صورة مستقيم بواسطة ازاحة هو مستقيم يوازيه اذن $(AI)\parallel(BJ)$

3) أ) لدينا حسب المعطيات : $h(B)=C$

ونعلم أن صورة المستقيم $(AB)$ بواسطة تحاك هو مستقيم يوازيه ويمر من صورة $B$ أي يمر من $C$

اذن هو المستقيم $(CD)$

وبالتالي: $h((AB))=(CD)$

3) ب) $h(B)=C$ يعني $\vec{IC}=k\vec{IB}$

ونعلم حسب المعطيات أن: $\vec{CI}=\frac{2}{3}\vec{CB}$ يعني $3\vec{CI}=2\vec{CB}$

يعني $3\vec{CI}=2(\vec{CI}+\vec{IB})$ يعني $3\vec{CI}=2\vec{CI}+2\vec{IB}$

يعني $3\vec{CI}-2\vec{CI}=2\vec{IB}$ يعني $\vec{CI}=2\vec{IB}$

يعني $\vec{IC}=-2\vec{IB}$ ومنه $k=-2$

5) أ) $h(J)=K$ ؟؟؟؟؟

ونعلم حسب المعطيات أن: $\vec{IJ}=\vec{DC}$ وأن : $\vec{KI}=2\vec{AB}$

اذن : $\vec{KI}=2\vec{IJ}$ يعني $\vec{IK}=-2\vec{IJ}$

و هذا يعني أن : $h(J)=K$

أ) وجدنا اذن : $\begin{cases} h(J)=K \\ h(B)=C \end{cases}$ اذن : $\vec{CK}=-2\vec{BJ}$

(حسب الخاصية المميزة للتحاكي)

ومنه بالمرور الى المنظم نجد :

$\|\vec{CK}\|=\|-2\vec{BJ}\|$ اذن : $\|\vec{CK}\|=|-2|\|\vec{BJ}\|$

اذن : $CK=2BJ$

وجدنا $\vec{IJ}=\vec{AB}$ ادن : $ABJI$ متوازي الأضلاع اذن

$BJ=AI$ اذن : $CK=2AI$ يعني $AI=\frac{1}{2}CK$

## V. الحفاظ على معامل استقامية متجهتين:

ليكن $T$ تحويلا اعتياديا في المستوى و $A$ و $B$ و $C$ و $D$ نقط و $A'$ و $B'$ و $C'$ و $D'$ صورهم بالتحويل $T$

اذا كان : $\vec{CD}=k\vec{AB}$ فان : $\vec{C'D'}=k\vec{A'B'}$

**تمرين 8:** ليكن $ABC$ مثلثا و $I$ منتصف $[BC]$

نعتبر النقطتين $B'$ و $C'$ بحيث : $\vec{AB'}=\frac{2}{3}\vec{AB}$ و $\vec{AC'}=\frac{2}{3}\vec{AC}$

و ليكن $J$ منتصف $[B'C']$

وليكن $h$ التحاكي الذي مركزه $A$ نسبته $k=\frac{2}{3}$

1) بين أن $\vec{B'C'}=\frac{2}{3}\vec{BC}$ :

2) باستعمال التحاكي $h$ بين أن النقط $J$ و $A$ و $I$ نقط مستقيمية

**الأجوبة:** 1) $\vec{AB'}=\frac{2}{3}\vec{AB}$ يعني : $h(B)=B'$

$\vec{AC'}=\frac{2}{3}\vec{AC}$ يعني : $h(C)=C'$ اذن : $\vec{B'C'}=\frac{2}{3}\vec{BC}$

(حسب الخاصية المميزة للتحاكي)

2) لدينا $I$ منتصف $[BC]$ اذن: $h(I)$ منتصف $[B'C']$

وبما أن : $J$ منتصف $[B'C']$ فان : $h(I)=J$

ومنه : النقط $J$ و $A$ و $I$ نقط مستقيمية **<u>انتهى الدرس</u>**

## <u>ملاحظات عامة حول الدرس</u>