عموميات حول الدوال العددية

I- الدالة – تساوي دالتين – التمثيل المبياني لدالة

1/ تعريف دالة – مجموعة تعريف دالة

نشاط

حدد مجموعة تعريف الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x في الحالات التالية

$f(x)=\frac{5}{4-x}$; $f(x)=\sqrt{2x+1}$ (b $\qquad$ (a

$f(x)=\frac{3x^2-2}{x^2+2x-3}$; $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{3-x}}$ (d $\qquad$ (c

الحل

(a $f(x)=\frac{5}{4-x}$

لتكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f$ تكافئ $4-x\neq 0$

تكافئ $x\neq 4$

اذن $D_f=\mathbb{R}-\{4\}$

(b $f(x)=\sqrt{2x+1}$

$x\in D_f$ تكافئ $2x+1\succ 0$

تكافئ $x\geq -\frac{1}{2}$

اذن $D_f=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

(c $f(x)=\frac{3x^2-2}{x^2+2x-3}$;

$x\in D_f$ تكافئ $x^2+2x-3\neq 0$

ليكن Δ مميز ثلاثية الحدود x^2+2x-3

$\Delta=4+12=16$

و منه لـ x^2+2x-3 جرين هما $x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=1$ و $x_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}$

تعريف

نقول اننا عرفنا دالة عددية لمتغير حقيقي f اذا ربطنا كل عدد من $\mathbb{R}$ على الاكثر بعدد حقيقي نرمز له بـ $f(x)$.

$f(x)$ تقرأ صورة x بالدالة f أو باختصار f لـ x

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية التي تقبل صورة بالدالة f

نرمز لها بـ D_f

2- تساوي دالتين

نشاط

قارن الدالتين العدديتين f و g لمتغير حقيقي في الحالتين التاليتين

$f(x)=x-1$; $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ (a

$f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}$; $g(x)=\dfrac{2}{x(x+2)}$ (b

a/ لدينا $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

ومنه $D_f\neq D_g$ اذن $f\neq g$

b/ لدينا $D_g=D_f=\mathbb{R}^*-\{2\}$

لتكن $x\in\mathbb{R}^*-\{2\}$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x}{x(x+2)}=\frac{2}{x(x+2)}=g(\ )$$

إذن $f=g$

تعريف

لتكن f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي

تكون f و g متساويتين اذا وفقط اذا كان لهما نفس مجموعة التعريف D و لكل x من D

$f(x)=g(x)$

3- التمثيل المبياني لدالة

نشاط

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|-2}$

أ- حدد D_f

ب - حدد أرتوبي A و B نقطتين من المنحنى C_f أفصوليهما على التوالي 0 و 3

ج- هل النقط $C(2;0)$; $D(-4;6)$; $E(4;-6)$ تنتمي إلى C_f

د – أكتب $f(x)$ بدون رمز للقيمة المطلقة ثم أنشئ المنحنى C_f في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

الحل

أ- نحدد D_f

$x\in D_f$ تكافئ $|x|-2\neq 0$

تكافئ $|x|\neq 2$

تكافئ $x\neq 2$ أو $x=-2$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

ب - نحدد أرتوبي A و B نقطتين من المنحنى C_f أفصوليهما على التوالي 0 و 3

لدينا $f(0)=\dfrac{-4}{-2}=2$ و منه $A(0;2)\in C_f$

لدينا $f(3)=\dfrac{9-4}{3-2}=5$ و منه $B(3;5)\in C_f$

ح- هل النقط $C(2;0)$; $D(-4;6)$; $E(4;-6)$ تنتمي إلى C_f

لدينا $2\notin\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ومنه $C(2;0)\in C_f$

لدينا $f(-4)=\dfrac{16-4}{4-2}=6$ و منه $D(-4;6)\in C_f$

لدينا $f(4)=\dfrac{16-4}{4-2}=6$ و منه $E(4;-6)\notin C_f$

د – نكتب $f(x)$ بدون رمز للقيمة المطلقة

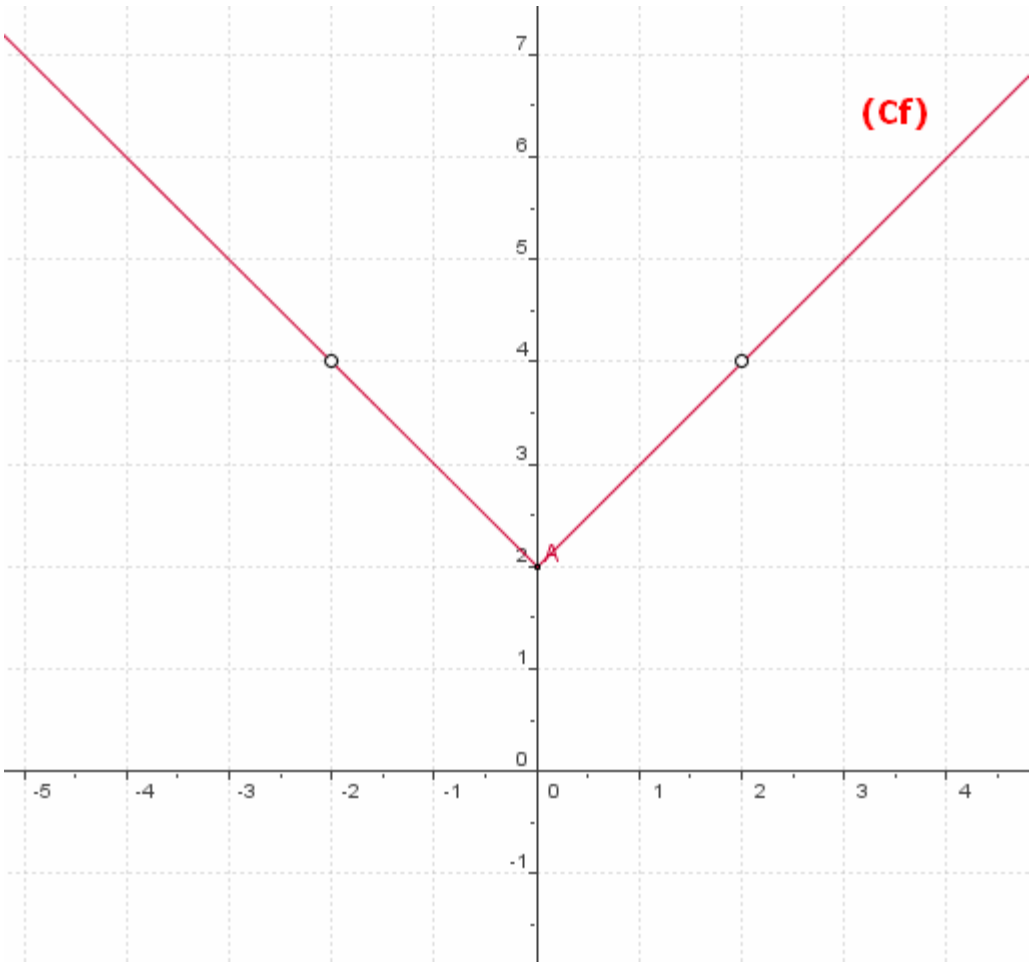
لدينا إذا كان $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$ فان $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|-2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$

إذا كان $x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ فان $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|-2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{-x-2}=-x+2$

ننشئ المنحنى C_f

معادلة جزء C_f على $[0;2[\cup]2;+\infty[$ هي $y=x+2$ و منه C_f نصع مستقيم أصله النقطة $A(0;2)$ محروم من النقطة ذات الأفصول 2

معادلة جزء C_f على $]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ هي $y=-x+2$ و منه C_f نصع مستقيم أصله النقطة $A(0;2)$ محروم من النقطة ذات الأفصول 2 -



تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .

التمثيل المبياني للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x;f(x))$ حيث $x\in D_f$ نرمز لها بالرمز C_f $\quad C_f=\{M(x;f(x))/x\in D_f\}$

ملاحظة

$M(x;y)\in C_f$ تكافئ $y=f(x)$ و $x\in D_f$

العلاقة $y=f(x)$ تسمى معادلة ديكارتية للمنحنى C_f

Moutamadris.ma

II - زوجية دالة

1- الدالة الزوجية

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

نقول ان f دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان :

* لكل x من D_f $\quad -x \in D_f$

* لكل x من D_f $\quad f(-x)=f(x)$

تمرين

هل الدالة العددية f زوجية في الحالات التالية

$$f(x)=|x|-\frac{1}{x^2} \quad (a \quad ; \quad f(x)=x^3+1 \quad (b$$

$$\begin{cases} f(x)=2x & 0 \le x \prec 4 \\ f(x)=-2x & x \prec 0 \end{cases} \quad (c$$

/a $f(x)=|x|-\frac{1}{x^2}$

$D_f=\mathbb{R}^*$

لدينا لكل $x \in \mathbb{R}^*$ $\quad -x \in \mathbb{R}^*$

لتكن $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x)=|-x|-\frac{1}{(-x)^2}=|x|-\frac{1}{x^2}=f(x)$$

إذن f دالة زوجية

/b $f(x)=x^3+1$

$$f(1)=1^3+1=1+1=2 \qquad f(-1)=(-1)^3+1=-1+1=0$$

ومنه $f(-1) \neq f(1)$

f دالة غير زوجية

/c $\begin{cases} f(x)=2x & 0 \le x \prec 4 \\ f(x)=-2x & x \prec 0 \end{cases}$

$D_f=]-\infty;0[\cup[0;4[=]-\infty;4[$

نلاحظ أن $-6 \in D_f$ و $6 \notin D_f$ اذن f دالة غير زوجية

ب التمثيل المبياني لدالة زوجية

f دالة زوجية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;f(x))$ من C_f و M' مماثلتها بالنسبة لمحور الأراتيب .

ومنه $M'(-x;f(x))$

و حيث أن f زوجية فان $-x \in D_f$ و $f(-x)=f(x)$

ومنه $M'(-x;f(-x))$ و بالتالي $M' \in C_f$

اذن C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

العكس

بين أنه إذا كان C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب فان f دالة زوجية

خاصية

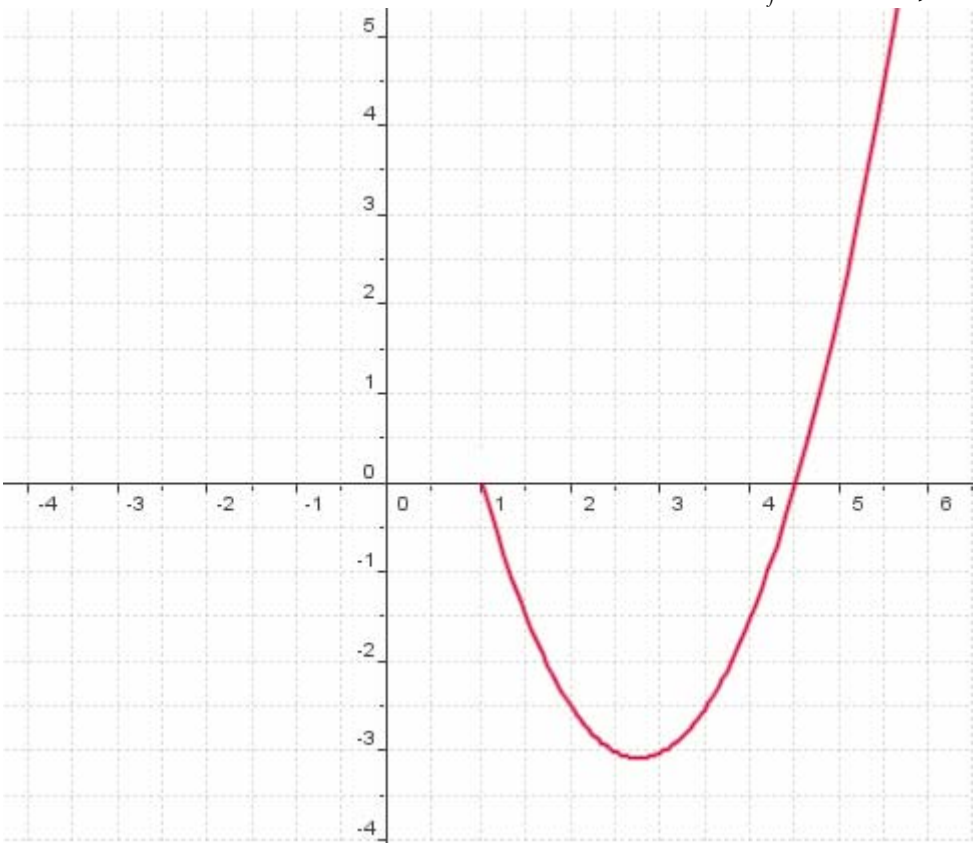
لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

تكون f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل للمنحنى C_f

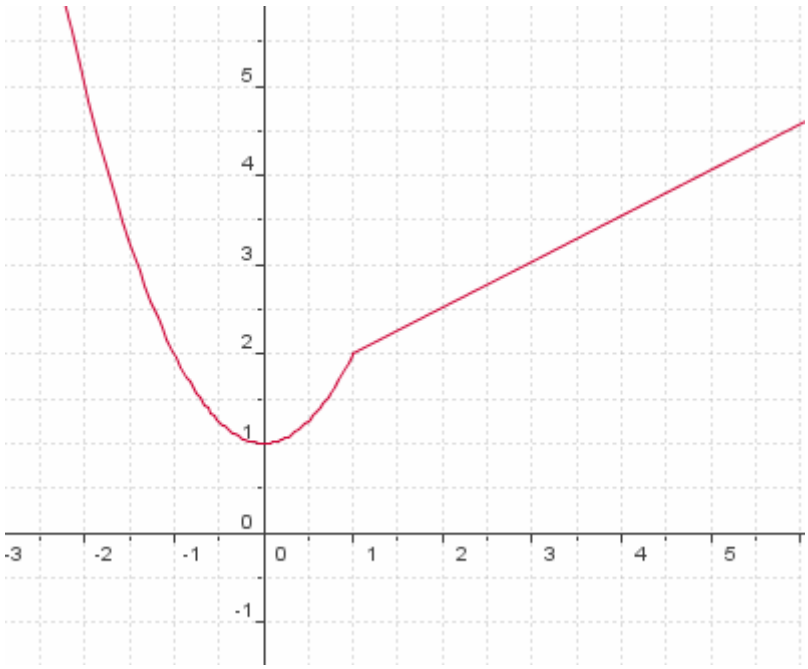
Moutamadris.ma

تمرين

1- f دالة زوجية أتمم المنحنى C_f



2- f دالة عددية منحناها كما يلي



هل f زوجية

2- دالة فردية

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

نقول ان f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان :

* لكل x من D_f $\quad -x \in D_f$

* لكل x من D_f $\quad f(-x) = -f(x)$

تمرين

هل الدالة العددية f فردية في الحالات التالية

$f(x)=\frac{1}{x^3}$; $f(x)=x^3+1$ (b

$\begin{cases} f(x)=-2x+1 & 0\le x\le 2 \\ f(x)=-2x-1 & -2\le x\prec 0 \end{cases}$ (c

/a $f(x)=\frac{1}{x^3}$

$D_f=\mathbb{R}^*$

لدينا لكل $x\in\mathbb{R}^*$ $-x\in\mathbb{R}^*$

لتكن $x\in\mathbb{R}^*$

$f(-x)=\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{1}{x^3}=-f(x)$

إذن f دالة فردية

/b $f(x)=x^3+1$

$f(1)=1^3+1=1+1=2$ $f(-1)=(-1)^3+1=-1+1=0$

ومنه $f(-1)\neq -f(1)$

f دالة غير فردية

/c $\begin{cases} f(x)=-2x+1 & 0\le x\le 2 \\ f(x)=-2x-1 & -2\le x\prec 0 \end{cases}$

$D_f=[-2;0[\cup[0;2]=[-2;2]$

لدينا لكل $x\in[-2;2]$ و $-x\in[-2;2]$

إذا كان $x\in]0;2]$ فان $-x\in[-2;0[$

و بالتالي $f(x)=-2x+1$ و $f(-x)=-2(-x)-1=2x-1$ و منه $f(-x)=-f(x)$

إذا كان $x\in[-2;0[$ فان $-x\in]0;2]$

و بالتالي $f(x)=-2x-1$ و $f(-x)=-2(-x)+1=2x+1$ و منه $f(-x)=-f(x)$

إذن لكل $x\in[-2;2]$ $f(-x)=-f(x)$

إذن f دالة فردية

ب-التمثيل المبياني لدالة فردية

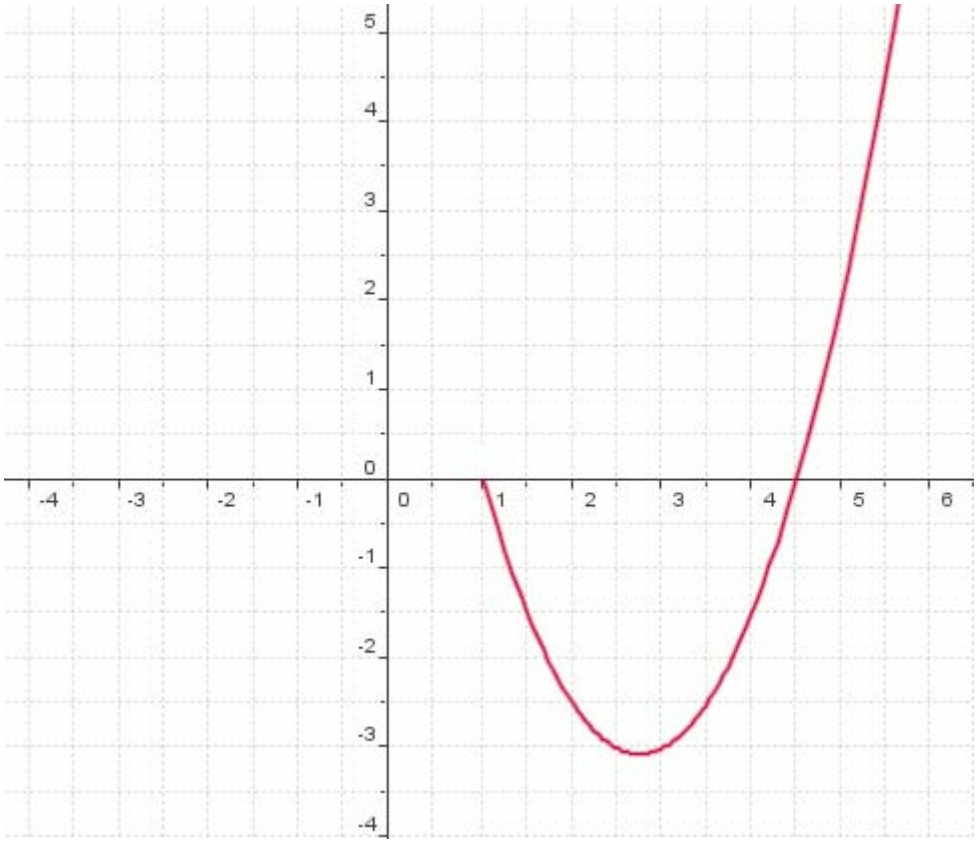
خاصية

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

تكون f دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

تمرين

f دالة فردية أتمم المنحنى C_f



تمرين

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\dfrac{|x|+x^2}{x}$

حدد D_f وبين أن f فردية ثم أنشئ C_f

ملاحظة يمكن للدالة أن تكون غير فردية و غير زوجية

III- تغيرات دالة

1- منحى تغيرات دالة

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \leq f(x_2)$
- تكون f تزايدية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \prec f(x_2)$
- تكون f تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \geq f(x_2)$
- تكون f تناقصية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \succ f(x_2)$

مثال أدرس تغيرات الدالة f حيث $f(x)=-2x+1$

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a \prec b$

ومنه $-2a \succ -2b$ و بالتالي $-2a+1 \succ -2b+1$ $f(a) \succ f(b)$

إذن f تناقصية قطعا

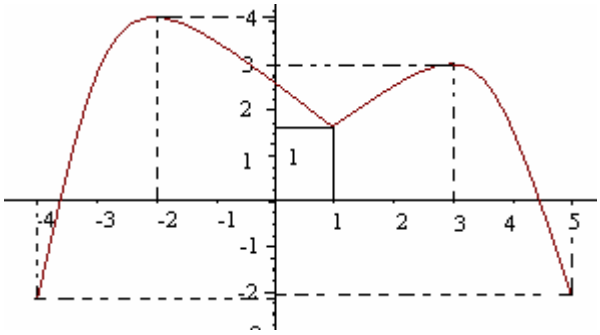
تمرين نعتبر $f(x)=|x-2|$

أدرس منحى تغيرات f على كل من $]-\infty;2]$ و $[2;+\infty[$

أنشئ C_f

Moutamadris.ma

تمرين من خلال التمثيل المبياني للدالة f
على المجال $[-4;5]$ حدد تغيرات f



2- الدالة الرتيبة

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f
نقول ان f رتيبة على I إذا و فقط إذا كان f إما تزايدية علىI و إما تناقصية على I.

ملاحظات

- يمكن لدالة أن تكون غير رتيبة على مجال I
- دراسة رتابة f على مجال I يعني تجزيءI إلى مجالات
تكون فيها f رتيبة. ونلخص الدراسة في جدول يسمى جدول التغيرات

3- معدل التغير

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و x_1 و x_2 عنصرين مختلفينمن D_f
العدد $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x_1 و x_2.

مثال نعتبر $f(x)=x^2-3x$
أحسب معدل تغيرات f بين 2 و 1-

ب- معدل التغير و الرتابة

بتوظيف التعريف نحصل على

خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$
- تكون f تزايدية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\succ 0$
- تكون f تناقصية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq 0$
- تكون f تناقصية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\prec 0$

تمرين

نعتبر $f(x)=x^2-4x-1$
أدرس رتابة f على كل من المجالين $]2;+\infty[$; $]-\infty;2]$
و أعط جدول تغيرات f

الجواب

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a\neq b$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{a^2-4a-1-b^2+4b+1}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b)-4(a+b)}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b-4)}{a-b}=a+b-4$$

إذا كان a و b من $]2;+\infty[$ فان $a\succ 2$ و $b\succ 2$ ومنه $a+b\succ 4$ أي $a+b-4\succ 0$

إذن f تزايدية قطعا على $]2;+\infty[$

إذا كان a و b من $]-\infty;2]$ فان $a\le 2$ و $b\le 2$ ومنه $a+b\le 4$ أي $a+b-4\le 0$

إذن f تناقصية على $]-\infty;2]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↘	-1	↗

تمرين

نعتبر $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$

أدرس رتابة f

4- الرتابة وزوجية دالة

أ- خاصية

لتكن f دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f\cap\mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J=\{-x/x\in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تناقصية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تزايدية على J.

البرهان

لتكن f دالة زوجية و x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من J

ومنه يوجد x_1' و x_2' من I حيث $x_1'=-x_1$ و $x_2'=-x_2$

$$\frac{f(x_2')-f(x_1')}{x_2'-x_1'}=\frac{f(-x_2)-f(-x_1)}{-x_2+x_1}=-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

إذن تغيرات f على I عكس تغيرات f على J

أ- خاصية

لتكن f دالة فردية و I مجال ضمن $D_f\cap\mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J=\{-x/x\in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تزايدية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تناقصية على J.

ملاحظة

لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f\cap\mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f\cap\mathbb{R}^-$

تمرين

نعتبر $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

1- حدد D_f و أدرس زوجية f

2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

VI- القيمة القصوى – القيمة الدنيا

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي

- نقول ان f تقبل قيمة قصوى عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a\in I$ حيث لكل $x\in I-\{a\}$ $f(x)\prec f(a)$
- نقول ان f تقبل قيمة دنيا عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a\in I$ حيث لكل $x\in I-\{a\}$ $f(x)\succ f(a)$

اصطلاح

كل من قيم القصوى و قيم الدنيا تسمى مطاريف لدالة f

تمرين نعتبر $f(x)=x+\frac{1}{x}$

1- أدرس زوجية f أحسب $f(1)$

2- بين أن لكل x من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq 2$

3- حدد قيمة دنيا و قيمة قصوى لـ f إذا وجد

الجواب

1- ندرس زوجية f

$D_f=\mathbb{R}^*$

لكل $x\in\mathbb{R}$ $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$$

إذن f فردية

حساب $f(1)=1+\frac{1}{1}=2$

2- نبين أن لكل x من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq 2$

ليكن x من $]0;+\infty[$

$$f(x)-2=x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$$

بما أن $x\succ 0$ و $(x-1)^2\geq 0$ فان $f(x)\geq 2$

3- نحدد قيمة دنيا و قيمة قصوى لـ f

من 1/ و 2/ نستنتج أن لكل x من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq f(1)$

اذن f تقبل قيمة دنيا عند 1

ليكن $x\in]-\infty;0[$ و منه $-x\in]0;+\infty[$ مما سبث نستنتج أن $f(-x)\geq f(1)$

و حيث f فردية فان $-f(x)\geq f(1)$ و بالتالي $f(x)\leq -f(1)$ أي $f(x)\leq f(-1)$

اذن f تقبل قيمة قصوى عند -1

خاصية

ليكن a و b و c أعداد حقيقية حيث $a\prec b\prec c$ و f دالة عددية لمتغير حقيقي

إذا كانت f تزايدية على $[a;b]$ و تناقصية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند b

إذا كانت f تناقصية على $[a;b]$ و تزايدية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة دنيا عند b

V - دراسة تغيرات دالة – دراسة وضعية منحنين

دراسة تغيرات دالة f يعني

- تحديد D_f
- دراسة رتابة f وتلخيصها في جدول التغيرات

دراسة وضع منحنيين مبيانيا

ليكن C_f و Cg منحنيين للدالتين f و g على التوالي

يكون $f(x)\succ g(x)$ على المجال I اذا و فقط كان C_f فو ق Cg في المجال I

يكون $f(x)\prec g(x)$ على المجال I اذا و فقط كان C_f تحت Cg في المجال I

حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ على المجال I هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنيين C_f تحت Cg في المجال I

تمرين

Moutamadris.ma

أدرس تغيرات f حيث $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x-1}$

تمرين

أدرس تغيرات f حيث $f(x)=x^3-3x$

حدد مطاريف الدالة f

تمارين و حلول

تمرين1

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ: $f(x)=x|x|-4x$

1 – أدرس زوجية الدالة f

2 – أ) بين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $]0;+\infty[$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$$

ب) حدد رتابة f على كل من $]0;2[$ و $]2;+\infty[$ و استنتج رتابة f على كل من $]-2;0[$ و $]-\infty;-2[$

ج) اعط جدول تغيرات الدالة f

3- حدد مطاريف الدالة f إن وجدت

4- حدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2x$

$f(x)=x|x|-4x$

1 – ندرس زوجية الدالة f

لدينا $D_f=\mathbb{R}$

لكل x من $\mathbb{R}$: $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=-x|-x|+4x=-(x|x|-4x)=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

2 – أ) نبين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $]0;+\infty[$: $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$

لدينا لكل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=x^2-4x$

ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{x^2-4x-y^2+4y}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y)-4(x-y)}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y-4)}{x-y}$$
$$=x+y-4$$

ب) نحدد رتابة f على كل من $]0;2[$ و $]2;+\infty[$ و نستنتج رتابة f على كل من $]-2;0[$ و $]-\infty;-2[$

* ليكن x و y من $]0;2[$ حيث $x\neq y$ ومنه $0\leq x\prec 2$ و $0\leq y\prec 2$

و بالتالي $0\leq x+y\prec 4$ أي $-4\leq x+y-4\prec 0$

ومنه $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \prec 0$

إذن f تناقصية قطعا على $[0;2[$ و حيث أن f فردية فان f تناقصية قطعا على $]-2;0]$

* ليكن x و y من $]2;+\infty[$ حيث $x \neq y$ ومنه $x \succ 2$ و $y \succ 2$

وبالتالي $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$ أي $x+y-4 \succ 0$

إذن f تزايدية قطعا على $]2;+\infty[$ ومنه f تزايدية قطعا على $]-\infty;-2[$

ج) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f		4 ↗	↘ -4	↗

3- نحدد مطاريف الدالة f

بما أن f تزايدية على كل من $]2;+\infty[$ و $]-\infty;-2[$ و تناقصية على $[-2;2]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند -2 هي 4 و قيمة دنيا عند 2 هي -4

4- نحدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2x$

تحديد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يرجع إلى حل المعادلة $x|x|-4x=-2x$

$x|x|-4x=-2x$ تكافئ $x|x|-2x=0$

تكافئ $x(|x|-2)=0$

تكافئ $x=0$ أو $|x|=2$

تكافئ $x=0$ أو $x=2$ أو $x=-2$

إذن المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 2 و -2

تمرين2

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\frac{-x}{x^2-1}$

1- حدد D_f و بين أن f دالة فردية

2- يبن أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- حدد منحى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و استنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

4- أعط جدول تغيرات f

الحل

$$f(x)=\frac{-x}{x^2-1}$$

1- نحدد D_f

*- ليكن $x \in \mathbb{R}$

$x \in D_f$ يكافئ $x^2-1 \neq 0$

تكافئ $x^2 \neq 1$

تكافئ $x \neq 1$ و $x \neq -1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

*- نبين أن f دالة فردية

لكل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

لتكن $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$$f(-x)=\frac{-(-x)}{(-x)^2-1}=-\frac{-x}{x^2-1}=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

2- نبين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f $\quad \frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ حيث $a\neq b$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\frac{-a}{a^2-1}-\frac{-b}{b^2-1}}{a-b}=\frac{-a(b^2-1)+b(a^2-1)}{(a^2-1)(b^2-1)}\times\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{-ab^2+a+ba^2-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab(a-b)+a-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{(a-b)(ab+1)}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- نحدد منحى تغيرات f على $[0;1[$ و$]1;+\infty[$ و نستنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

لدينا لكل عنصرين مختلفين a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\quad \frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن a و b من $[0;1[$

ومنه $0\leq b\prec 1$; $0\leq a\prec 1$ و بالتالي $0\leq b^2\prec 1$ et $0\leq a^2\prec 1$ et $0\leq ab\prec 1$

ومنه $-1\leq b^2-1\prec 0$ et $-1\leq a^2-1\prec 0$ et $1\leq ab+1\prec 2$

إذن $\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}\succ 0$ ومنه f تزايدية على $[0;1[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-1;0]$

ليكن a و b من $]1;+\infty[$

ومنه $b\succ 1$; $a\succ 1$ و بالتالي $b^2\succ 1$ et $0\leq a^2\succ 1$ et $ab\succ 1$

ومنه $b^2-1\succ 0$ et $a^2-1\succ 0$ et $ab+1\succ 2$

إذن $\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}\succ 0$ ومنه f تزايدية على $]1;+\infty[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-\infty;-1[$

4- جدول تغيرات f

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	↗	↗	↗	↗	

Moutamadris.ma

1- دراسة و تمثيل مبيانيا الدالة $f : x \to ax^2$ حيث $a \neq 0$

أ- أمثلة

* نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x) = 2x^2$

- ندرس تغيرات f

$D_f = \mathbb{R}$

f دالة زوجية و منه اقتصار دراستها على $[0;+\infty[$

ليكن x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x \neq y$

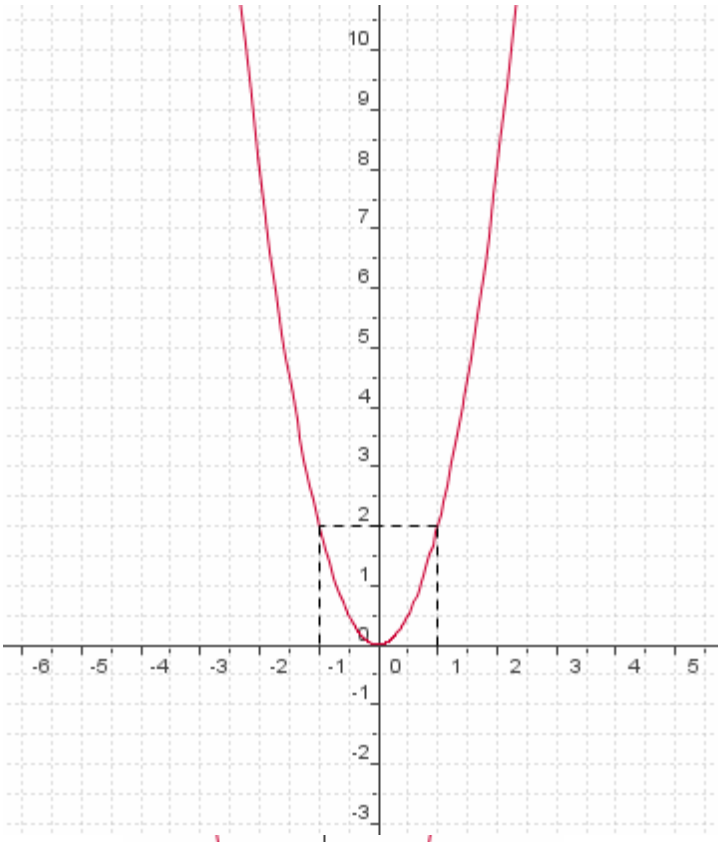
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 2(x+y)$$

لكل x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x \neq y$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$$

إذن f تزايدية على $[0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗



معادلة C_f هي $y = 2x^2$

C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

ملاحظة

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فان $0 \prec 2x^2 \prec 2x$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0;1[$ تحت المستقيم $(\Delta) : y = 2x$

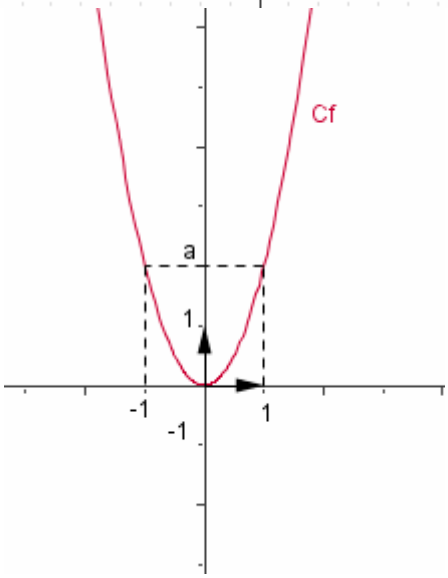
إذا كان $x \succ 1$ فان $2x^2 \succ 2x$

هذا يعني أن جزء C_f على $]1;+\infty[$ فوق المستقيم $(\Delta) : y = 2x$

جدول القيم

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل



* بالمثل أدرس الدالة f حيث $f(x) = \frac{-1}{2}x^2$

ب- الحالة العامة

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x) = ax^2$ حيث $a \neq 0$

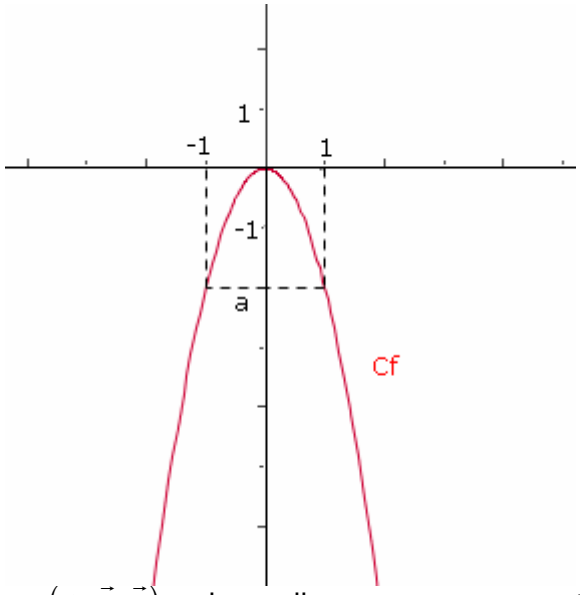
إذا كان $a \succ 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل

إذا كان $a \prec 0$ فان

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↗	0	↘	



C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل

تمرين $f(x)=x^2$ $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$m(x)=-2x^2$ $h(x)=3x^2$

1- أعط جدول تغيرات f و g و h و m

2- في نفس المعلم المتعامد الممنظم أنشئ C_f و C_g و C_h و C_m

2- دراسة الدالة $x \to ax^2+bx+c$

لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين و $\vec{u}(\alpha;\beta)$ متجهة في مستوى منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

و t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$

$t(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ تكافئ $\begin{cases}X-\alpha=x\\Y-\beta=y\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}X=x+\alpha\\Y=y+\beta\end{cases}$

مثال1 لندرس f حيث $f(x)=2x^2-4x-3$

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x)=2(x-1)^2-5$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=2(x-1)^2-5$ أي $y+5=2(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;-5)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \to 2x^2$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases}X-1=x\\Y+5=y\end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=2x^2$

تكافئ $Y+5=2(X-1)^2$

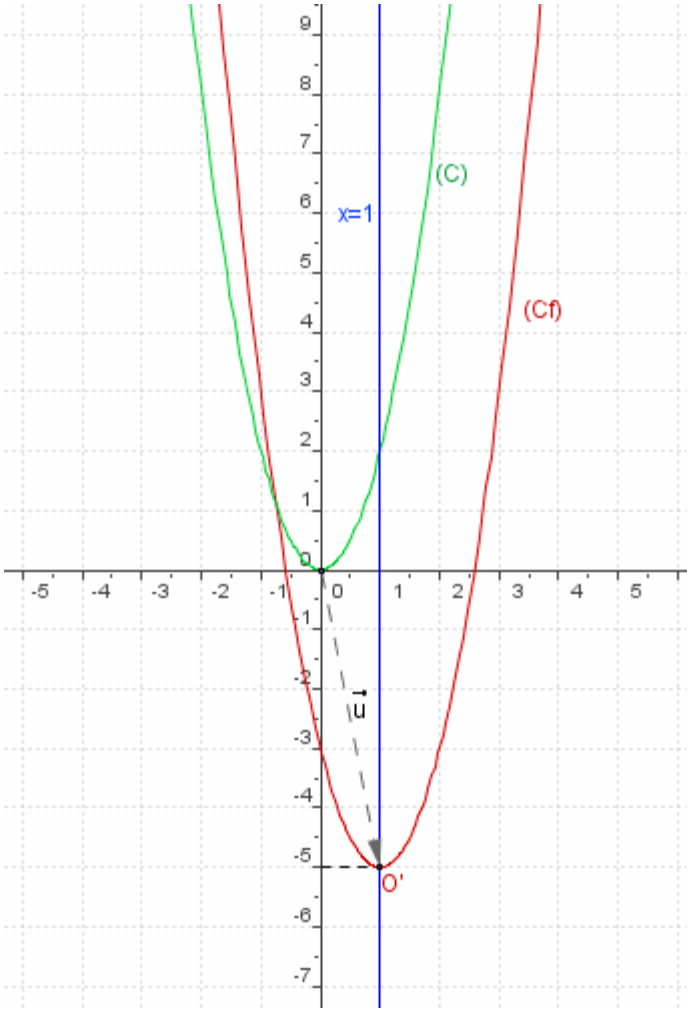
تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0;0)$ و محور تماثله محور الاراتيب فان (C_f) شلجم رأسه $t(O)=O'$

أي $O'(1;-5)$ و محور تماثله المستقيم ذا المعادلة $x=1$

و حيث أن الدالة $x \to 2x^2$ تزايدية على $[0;+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty;0]$ فان الدالة f تزايدية على $[1;+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty;1]$



جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	-5	↗	

إنشاء المنحنى

x	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-5	-3	3

Moutamadris.ma

مثال2 لندرس f حيث $f(x)=-x^2+2x+3$

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x)=-(x-1)^2+4$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=-(x-1)^2+4$ أي $y-4=-(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;4)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x\to -x^2$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases}X-1=x\\Y-4=y\end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=-x^2$

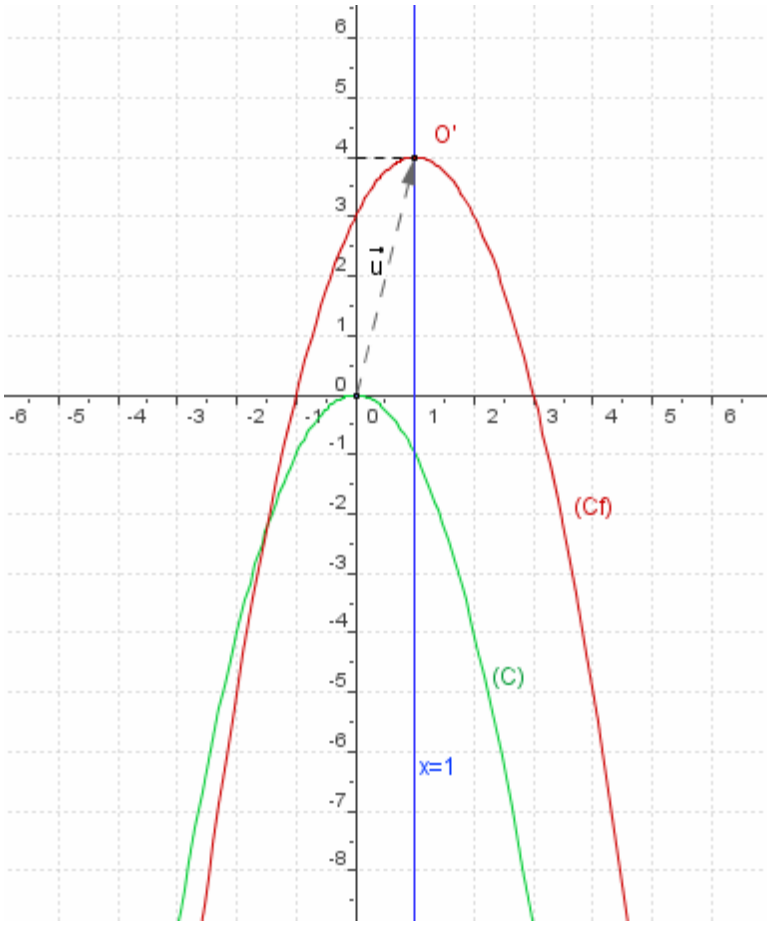
تكافئ $Y-4=-(X-1)^2$

تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0;0)$ و محور تماثله محور الاراتيب فان (C_f) شلجم رأسه O' أي $t(O)=O'(1;4)$ و محور تماثله المستقيم ذا المعادلة $x=1$

و حيث أن الدالة $x\to -x^2$ تناقصية على $[0;+\infty[$ و تزايدية على $]-\infty;0]$ فان الدالة f تناقصية على $[1;+\infty[$ و تزايدية على $]-\infty;1]$



جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↗	4	↘	

إنشاء المنحنى

$f(x)=0$ تكافئ $x=-1$ أو $x=3$

x	0	1	2	4
$f(x)$	3	4	3	-5

الحالة العامة $x\to ax^2+bx+c$ حيث $a\neq 0$

نشاط

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ و $a\neq 0$

1/ أعط الشكل القانوني لـ f

2/ بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to ax^2$ بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ و استنتج طبيعة (C_f)

ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد a

Moutamadris.ma

خاصيات

لتكن f دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ و $a\neq 0$

* $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ لكل x من $\mathbb{R}$ حيث $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ و $\beta=f(\alpha)$ هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة f

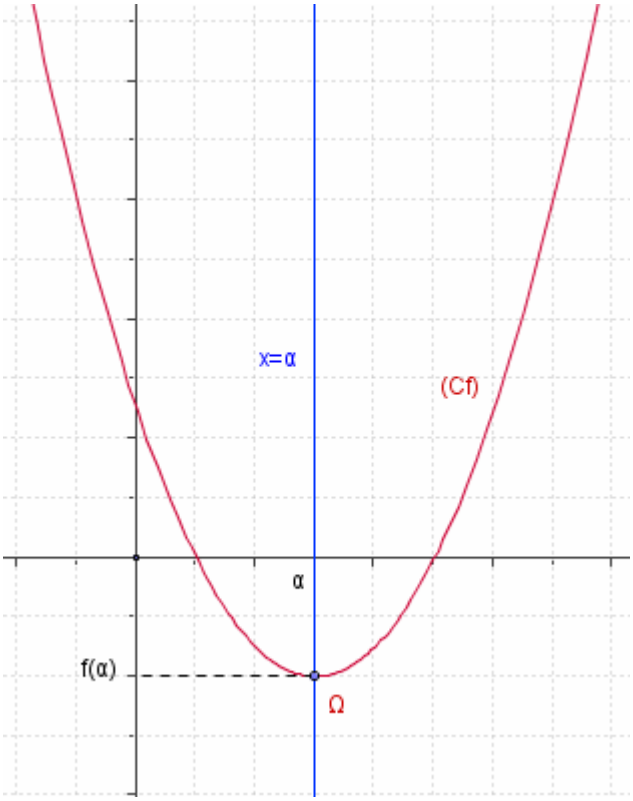
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to ax^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو شلجم رأسه $\Omega(\alpha;\beta)$ و محور تماثله المستقيم ذا $x=\alpha$

نضع $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$

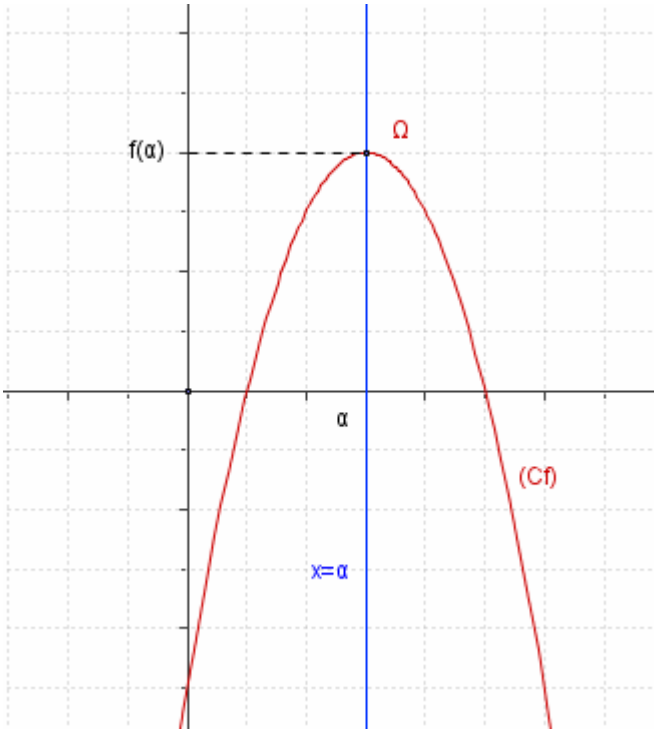
*- إذا كان $a\succ 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↘	$f(\alpha)$	↗



* إذا كان $a\prec 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↗	$f(\alpha)$	↘



3- دراسة الدالة $x\to\dfrac{a}{x}$

أ- أمثلة

* نعتبر الدالة $f(x)=\dfrac{2}{x}$

- ندرس تغيرات f

$D_f=\mathbb{R}^*$

f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0;+\infty[$

ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$ $\quad\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{-2}{xy}$

لكل x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$ $\quad\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\prec 0$

إذن f تناقصية على $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘

ملاحظة

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فان $\frac{2}{x} \succ 2$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0;1[$

فوق المستقيم $(\Delta): y = 2$

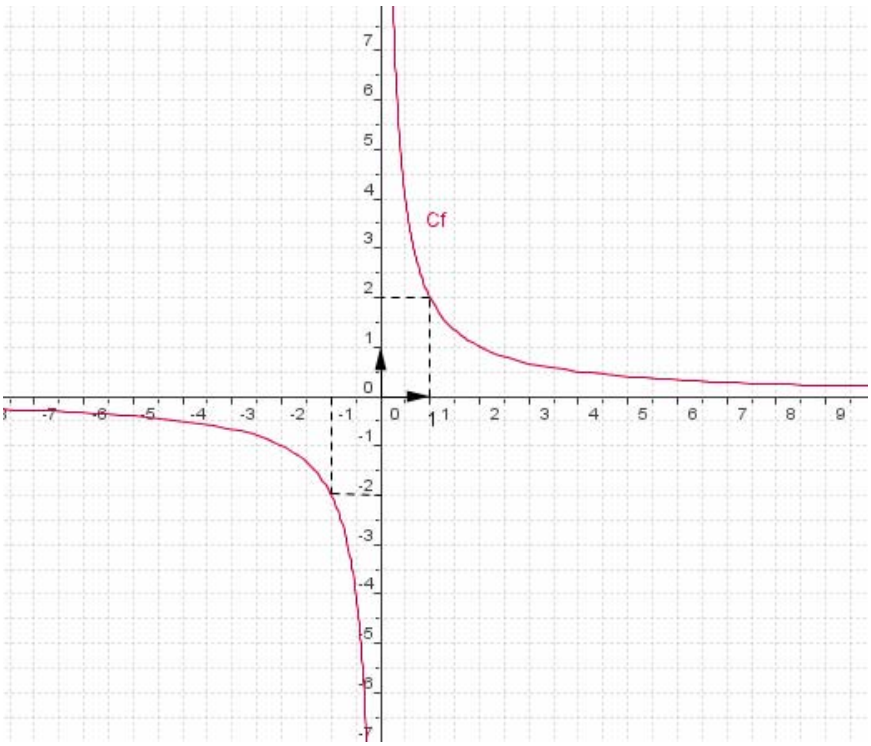
إذا كان $x \geq 1$ فان $0 \prec \frac{2}{x} \leq 2$

هذا يعني أن جزء C_f على $]1;+\infty[$

تحت المستقيم $(\Delta): y = 2$

جدول القيم

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	4	2	1	2



C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

* نعتبر الدالة $f(x) = \frac{-1}{x}$

- ندرس تغيرات f

$D_f = \mathbb{R}^*$

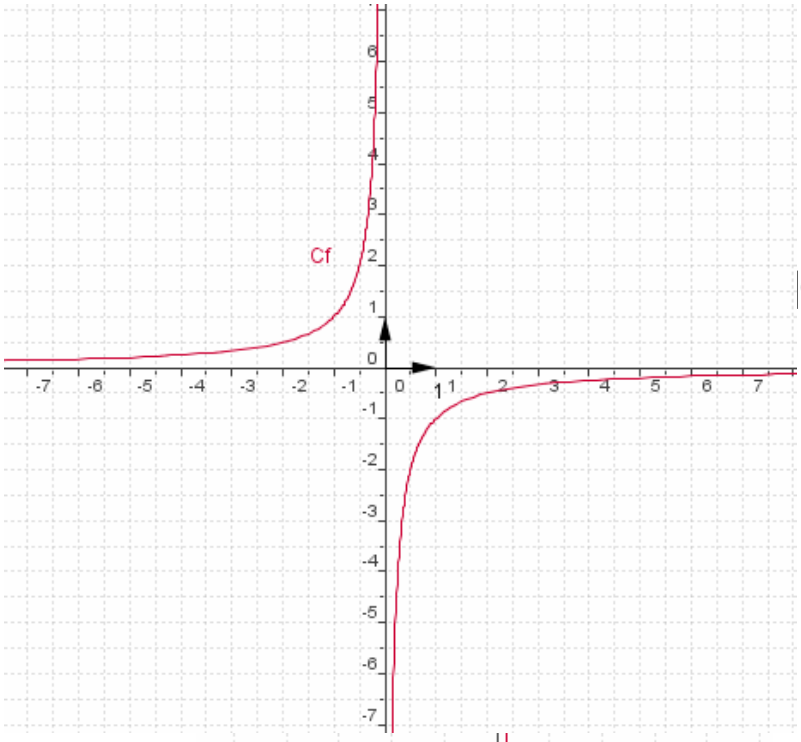
f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0;+\infty[$

ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{1}{xy}$$

إذن f تزايدية على $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	‖	↗



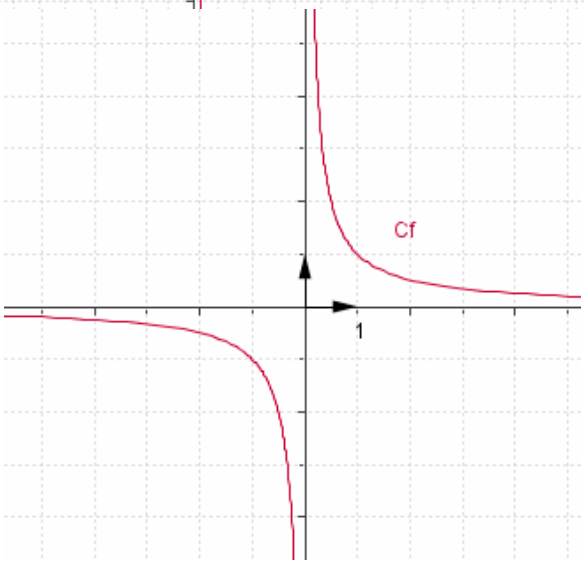
C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

ب- الحالة العامة

نعتبر $f(x) = \frac{a}{x}$

إذا كان $a \succ 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘

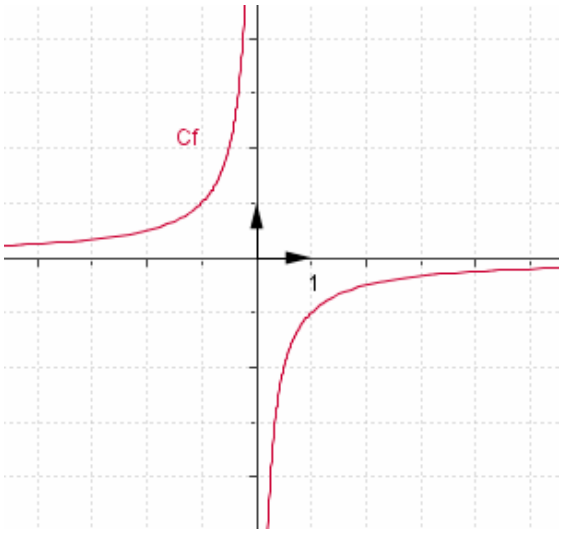


C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

Moutamadris.ma

إذا كان $a \prec 0$ فان

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	↗		‖		↗



C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

4 - دراسة الدالة $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$

مثال 1 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

*- $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

*- بإنجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y = 2 + \frac{3}{x-1}$ أي $y - 2 = \frac{3}{x-1}$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;2)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \to \frac{3}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M) = M'$ تكافئ $\begin{cases} X-1 = x \\ Y-2 = y \end{cases}$

$M(x;y) \in (C)$ تكافئ $y = \frac{3}{x}$ تكافئ $Y - 2 = \frac{3}{X-1}$ تكافئ $M'(X;Y) \in (C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هدلول مركزه $O(0;0)$ و مقارباه محورا المعلم فان (C_f) هدلول مركزه $t(O) = O'$ أي $O'(1;2)$ و مقارباه المستقيمان اللذان معادلتهما $x = 1$ و $y = 2$

و حيث أن الدالة $x \to \frac{3}{x}$ تناقصية على كل من $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ فان الدالة f تناقصية على كل من $]-\infty;1[$ و $]-\infty;1[$

جدول التغيرات

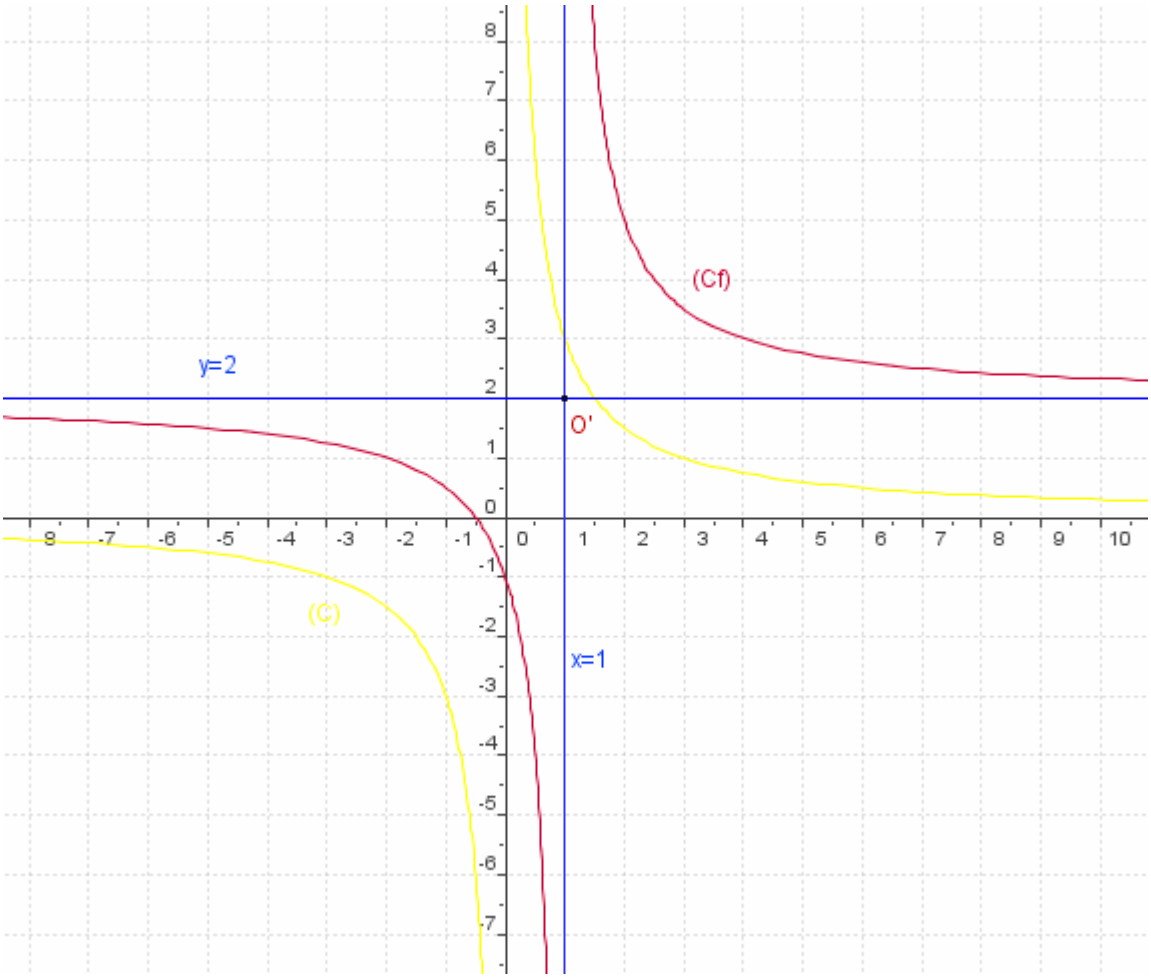
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	↘		‖		↘

إنشاء المنحنى

$f(x) = 0$ تكافئ $x = -\frac{1}{2}$

x	0	1	2	5
$f(x)$	-1	//	5	$\frac{11}{4}$

Moutamadris.ma



مثال 2 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

*- $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

*- بإنجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن

$$f(x)=2+\frac{-1}{x+2}$$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=2+\dfrac{-1}{x+2}$ أي $y-2=\dfrac{-1}{x+2}$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-2;2)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x\to\dfrac{-1}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases}X+2=x\\Y-2=y\end{cases}$

$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=\dfrac{3}{x}$ تكافئ $Y-2=\dfrac{-1}{X+2}$ تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هذلول مركزه $O(0;0)$ و مقارباه محورا المعلم فان (C_f) هذلول مركزه $t(O)=O'$ أي $O'(-2;2)$ و مقارباه المستقيمان اللذان معادلتهما $x=-2$ و $y=2$

و حيث أن الدالة $x\to\dfrac{-1}{x}$ تزايدية على كل من $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ فان الدالة f تزايدية على كل من $]-\infty;-2[$ و $]-\infty;-2[$

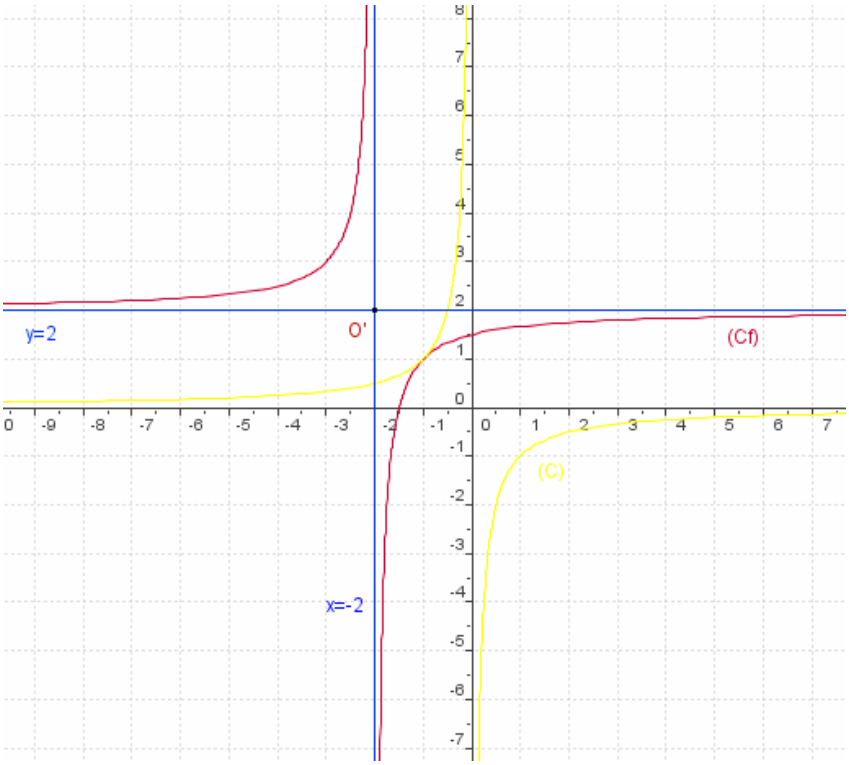
جدول التغيرات

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f	↗	‖	↗

إنشاء المنحنى

$x=-\frac{3}{2}$ تكافئ $f(x)=0$

x	-3	-2	-1	0	2
$f(x)$	1	//	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$



الحالة العامة $x\to\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$

نشاط

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$

1- حدد α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

2- بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to\frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$ و استنتج طبيعة (C_f)

3- بين أن تغيرات f مرتبطة بالعدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

خاصيات

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$

* توجد أعداد حقيقية α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

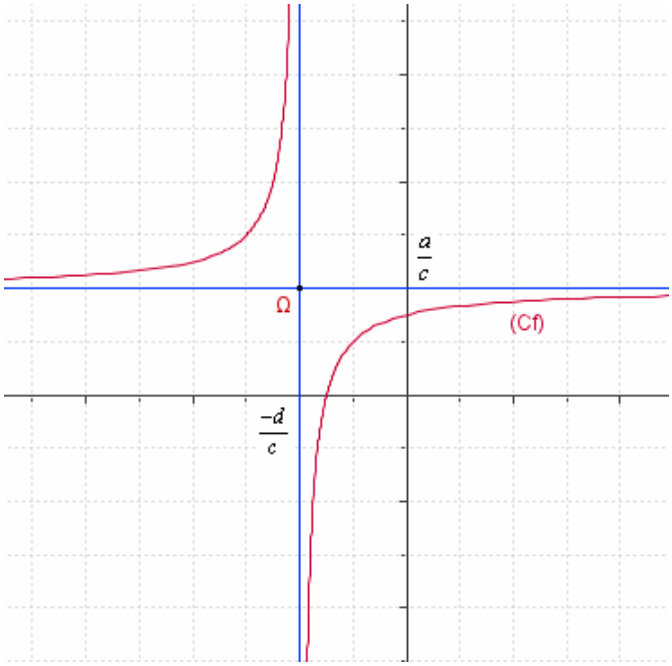
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to\frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو هدلول مركزه $\Omega(\alpha;\beta)$ و مقارباه هما المستقيمان المعرفان بـ $x=\alpha$ و $y=\beta$

ملاحظة: $\alpha=\frac{-d}{c}$ و $\beta=\frac{a}{c}$

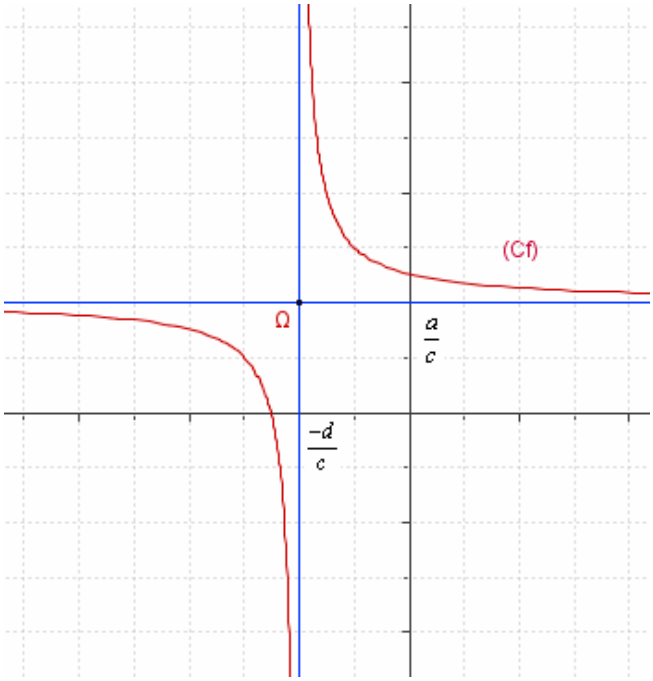
-* إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \succ 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	↗	‖	↗



-* إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \prec 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	↘	‖	↘



5- دالة الجيب sin - دالة جيب التمام cos

أ/ دالة الجيب sin

تعريف

الدالة $\sin us$ هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيبه $\sin x$

نكتب $\sin : x \to \sin x$

خاصية1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin(-x) = -\sin x$ نقول ان الدالة sin فردية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$

ومنه $\sin x = \sin(x + 2\pi)$

خاصية2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ نقول ان الدالة sin دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$

و حيث $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ فان $M'(x + 2k\pi;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$

و بالتالي $\overrightarrow{MM'} = 2k\pi\vec{i}$ أي M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى على مجال سعته 2π مثلا $[-\pi;\pi[$ و استنتاج ما تبقى من المنحنى في المجالات $]-\pi + 2k\pi;\pi + 2k\pi[$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

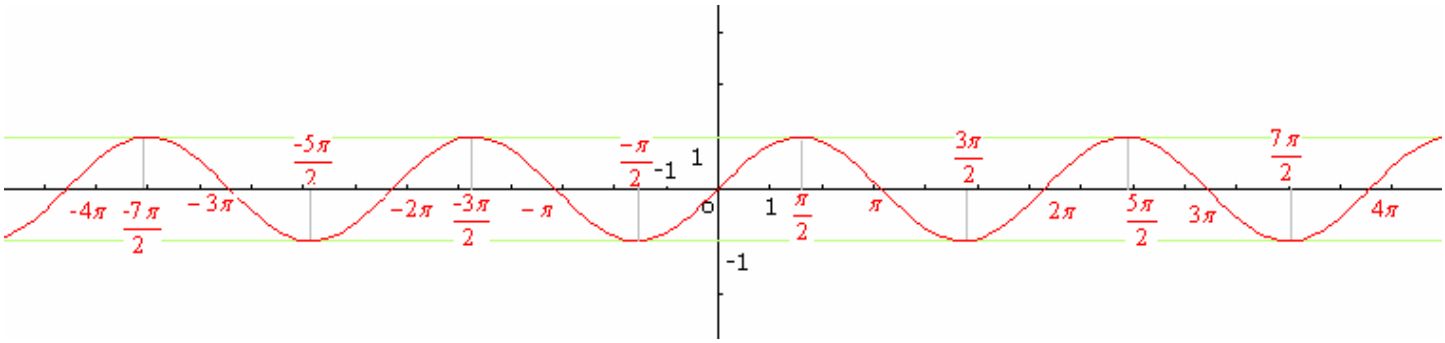
Moutamadris.ma

ملاحظة

sin فردية و منه المنحنى متماثل بالنسبة لأصل المعلم

يكفي تمثيل المنحنى $(C_{\sin})$ على $[0;\pi]$ و استنتاج المنحنى $(C_{\sin})$ عل $[-\pi;0]$

التمثيل المبياني لدالة sin



ب/ دالة جيب التمام cos

تعريف

الدالة cos sin us هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيب تمامه $\cos x$

نكتب $\cos : x \to \cos x$

خاصية1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos(-x) = \cos x$ نقول إن الدالة cos زوجية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$

ومنه $\cos x = \cos(x + 2\pi)$

خاصية2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ نقول إن الدالة cos دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;\cos x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\cos})$

و حيث $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ فان $M'(x + 2k\pi;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\cos})$

و بالتالي $\overrightarrow{MM'} = 2k\pi\vec{i}$ أي M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

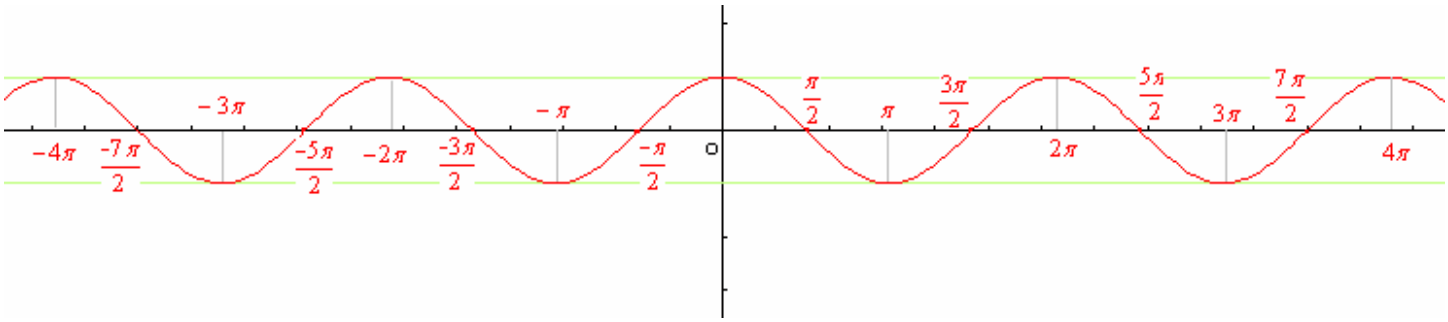
و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى $(C_{\cos})$على مجال سعته 2π مثلا $]-\pi;\pi]$ و استنتاج ما تبقى من المنحنى في المجالات $]-\pi + 2k\pi;\pi + 2k\pi]$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

ملاحظة

cos زوجية و منه المنحنى $(C_{\cos})$ متماثل بالنسبة لمحو الاراتيب

يكفي تمثيل المنحنى $(C_{\cos})$ على $[0;\pi]$ و استنتاج المنحنى $(C_{\cos})$ عل $[-\pi;0]$

التمثيل المبياني لدالة cos



تمارين و حلول

تمرين1

نعتبر f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي حيث $g(x)=\dfrac{-2x-1}{-2x+1}$; $f(x)=x^2-2x$

1 - حدد مجموعة تعريف الدالة g

2 - أعط جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

3- أ) أنقل الجدول التالي و أتممه

x	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$					
$g(x)$					

ب) حدد تقاطع C_f و محور الافاصيل

ج) أنشئ المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

الجواب

$$f(x)=x^2-2x \quad ; \quad g(x)=\frac{-2x-1}{-2x+1}$$

1 - نحدد مجموعة تعريف الدالة g

ليكن $x\in\mathbb{R}$ تكافئ $-2x+1\neq 0$ $x\neq\frac{1}{2}$ إذن $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2 - نعطي جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

جدول تعيرات f $a=1$ $\frac{-b}{2a}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	-1	↗	

جدول تغيرات g لدينا $\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-4$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g		↘	‖	↘	

3- أ - نتمم الجدول

x	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	3	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3
$g(x)$	$\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$

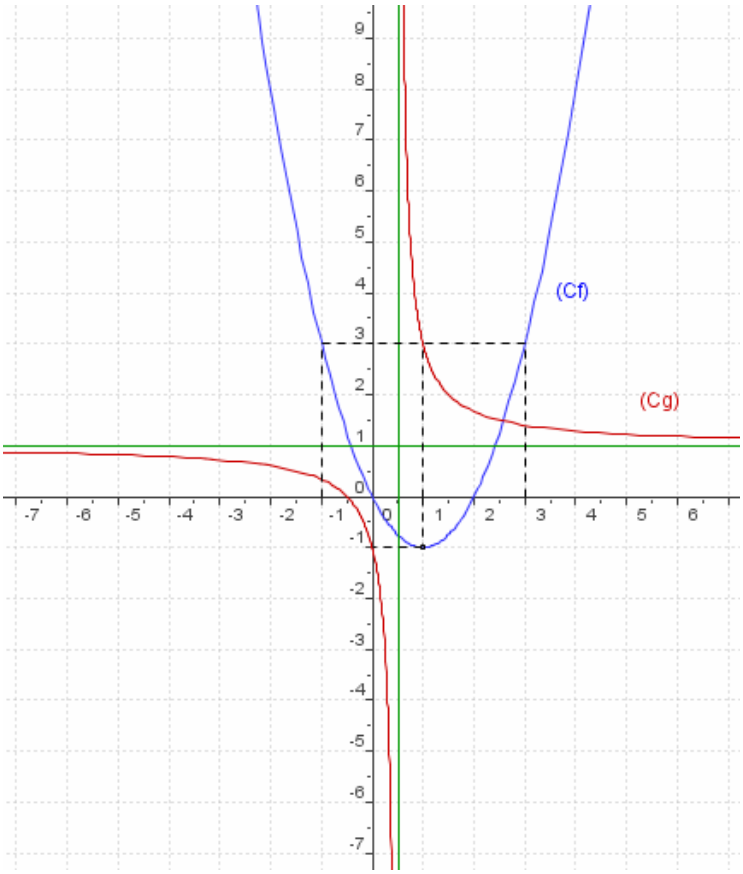
ب) نحدد تقاطع C_f و محور الافاصيل

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x=2$$

إذن C_f يقطع محو الافاصيل في النقطتين ذات الافصولين 0 و 2 على التوالي

ج) إنشاء المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$



تمرين2

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1} \qquad g(x)=x^2-3|x|$$

وليكن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ- حدد D_f

ب- أحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(4)$

2- أعط جدول تغيرات f

3- أ- أدرس زوجية g

ب- بين أن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

د- أعط جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

4- حدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

5 - أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

ج – حل مبيانيا المتراجحة $x^2-3|x|\geq 0$

الجواب

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1} \qquad g(x)=x^2-3|x|$$

2- أ- نحدد D_f

لتكن $x \in \mathbb{R}$

$x \in D_f$ تكافئ $x-1 \neq 0$

تكافئ $x \neq 1$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و$g(2)$ و $g(4)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f(2) = \frac{4-1}{2-1} = 3 \quad ; \quad g(2) = 4-6 = -2 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad ; \quad g(4) = 16-12 = 4$$

2- نحدد تغيرات f

لدينا $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ ومنه f تناقصية على كل من $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

3- أ- ندرس زوجية g

لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $-x \in \mathbb{R}$

$$g(-x) = (-x)^2 - 3|-x| = x^2 - 3|x| = g(x)$$

g دالة زوجية

ب- بين أن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

لدينا $g(x) = x^2 - 3x$ لكل x من $[0;+\infty[$

$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 0 \qquad \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$

معامل x^2 هو العدد الموجب 1 و منه الدالة $x \to x^2 - 3x$ تزايدية $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

اذن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

د- نعطي جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

لدينا g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

و حيث أن g زوجية فان g تزايدية على $\left]-\frac{3}{2};0\right]$ و تناقصية على $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

جدول تغيرات g

x	∞-		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g		↘	$\frac{9}{4}$	↗	0	↘	$\frac{9}{4}$	↗	

4- نحدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

بما أن g زوجية فانه يكفي تحديد تقاطع C_g و محور الأفاصيل على $\mathbb{R}^+$ و استنتاج التقاطع على $\mathbb{R}^-$

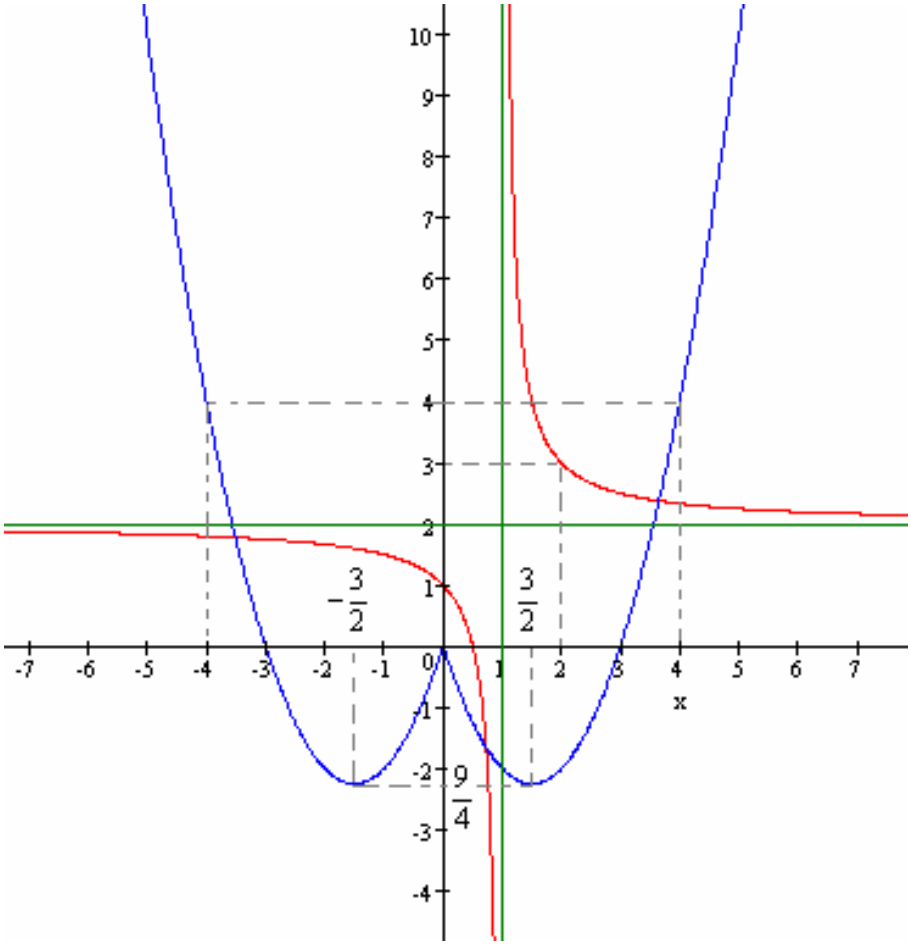
ليكن $x \in \mathbb{R}^+$: $g(x) = 0$ تكافئ $x^2 - 3x = 0$

تكافئ $x = 0$ أو $x = 3$

Moutamadris.ma

إذن C_g و محور الأفاصيل يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 3 و 3- على التوالي

5 - أ- ننشئ C_f و C_g



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

من خلال التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g يتقاطعان في ثلاث نقط

ومنه للمعادلة $f(x)=g(x)$ ثلاثة حلول

ج – نحل مبيانيا المتراجحة $x^2-3|x|\geq 0$

$x^2-3|x|\geq 0$ تكافئ $g(x)\geq 0$ تكافئ C_g فوق محور الأفاصيل

من خلال التمثيل المبياني يتضح أن C_g فوق محور الأفاصيل أو ينطبقان في $]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[\cup\{0\}$

إذن $S=]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[\cup\{0\}$

تمرين3

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$$f(x)=x^2-x \qquad g(x)=\frac{2|x|-1}{|x|-1}$$

وليكن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

3- أ- حدد D_g

ب- أحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

2- أ- أعط جدول تغيرات f

ب- حدد طبيعته المنحنى C_f

3- أ- بين أن g دالة زوجية

ب- حدد تغيرات g و أعط جدول تغيراتها

Moutamadris.ma

4- أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

الجواب

$$g(x)=\frac{2|x|-1}{|x|-1} \qquad f(x)=x^2-x$$

4- أ- نحدد D_g

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_g$ تكافئ $|x|-1\neq 0$

تكافئ $|x|\neq 1$

تكافئ $x\neq 1$ و $x\neq -1$

إذن $D_g=\mathbb{R}-\{1;-1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

$$g(2)=\frac{2\times 2-1}{2-1}=3 \quad ; \quad f(2)=2^2-2=4-2=2$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-1}=0 \quad ; \quad g(0)=\frac{2\times 0-1}{0-1}=1 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}$$

2- أ- نعطي جدول تغيرات f

لدينا $f(x)=x^2-x$ أي $a=1$ و $\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}$

ومنه جدول تغيرات f

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	↘	$\frac{-1}{4}$	↗

ب- حدد طبيعته المنحنى C_f

C_f شلجم رأسه $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ و محور تماثلة المستقيم ذا المعادلة $x=\frac{1}{2}$

3- أ- نبين أن g دالة زوجية

لكل $x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$ لدينا $-x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$

ليكن $x\in\mathbb{R}-\{1;-1\}$ $\qquad g(-x)=\frac{2|-x|-1}{|-x|-1}=\frac{2|x|-1}{|x|-1}=g(x)$

إذن g دالة زوجية

ب- نحدد تغيرات g و نعطي جدول تغيراتها

لكل x من $[0;1[\cup]1;+\infty[$: $|x|=x$ ومنه $g(x)=\frac{2x-1}{x-1}$

و حيث $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\prec 0$ فان g تناقصية على كل من $[0;1[$ و $]1;+\infty[$

و بما أن g دالة زوجية فان g تزايدية على كل من $]-\infty;-1[$ و $]-1;0]$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g	↗	‖	↗		1	↘	‖	↘	

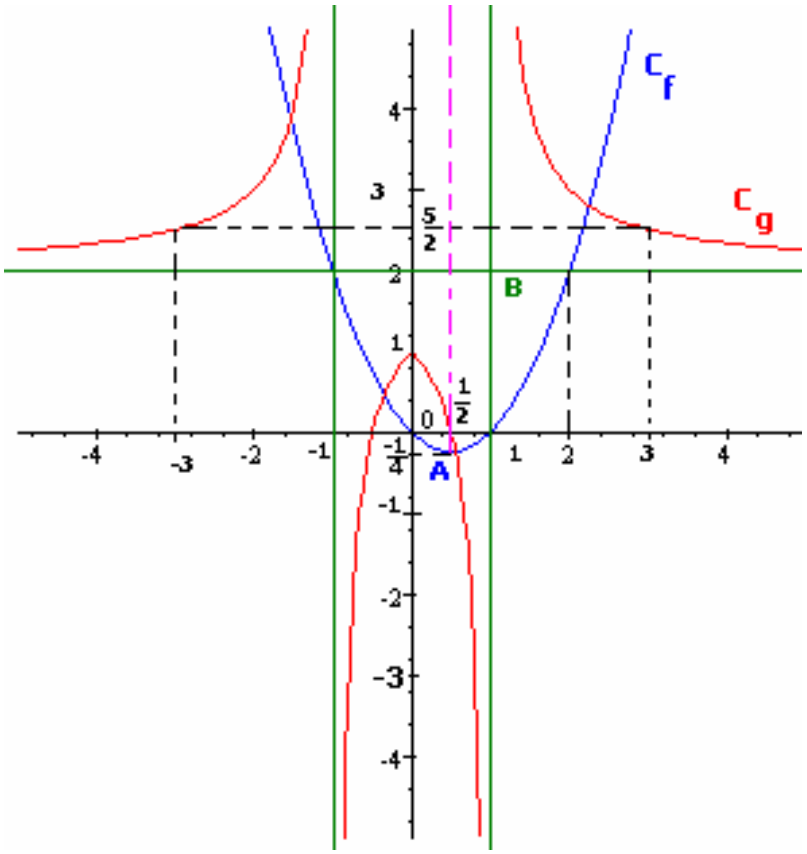
4- أ- ننشئ C_f و C_g

بما أن g زوجية فان C_g متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

جزئ منحنى C_g على $]1;+\infty[\cup[0;1[$ هو جزئ من هذلول مركزه $B(1;2)$ ومقارباه

$(\Delta_2): x=1$ $(\Delta_1): y=2$

C_f شلجم رأسه $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

من خلا ل التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g

يتقاطعان في أربع نقط

ومنه المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل أربعة حلول

Moutamadris.ma