

## تقارين وحلولها

$$D_{75} = \{ 1, 3, 15, 25, 75 \}$$

2 - من خلال السؤال 1 فإن :

$$\text{PGCD}(28, 75) = 1$$

3 - بما أن  $\text{PGCD}(28, 75) = 1$  فإن

28 و 75 أوليان فيما بينهما.

### تمرين 3 :

فكك الأعداد التالية إلى جداء عوامل أولية :

735 - 1449 - 2225 - 86625 - 11730

### الجواب :

تفكيك العدد 11730

11730	2
5865	5
1173	3
391	17
23	23
1	

ومنه فإن  $11730 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 23$

تفكيك العدد 86625

86625	5
17325	5
3465	5
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

### تمرين 1 :

1 - حدد لائحة قواسم العددين 42 و 70

2 - استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين

42 و 70.

### الجواب :

1 - قواسم العدد 42 هي :

$$D_{42} = \{ 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 \}$$

قواسم العدد 70 هي :

$$D_{70} = \{ 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70 \}$$

2 - من خلال ما سبق فإن أكبر قاسم مشترك

لـ 42 و 70 هو 14.

$$\text{PGCD}(42, 70) = 14 \quad \text{إذن}$$

### تمرين 2 :

1 - حدد لائحة قواسم العددين 28 و 75

2 - استنتج  $\text{PGCD}(28, 75)$

3 - ماذا تستنتج بالنسبة لـ 28 و 75.

### الجواب :

1 - قواسم العدد 28 هي :

$$D_{28} = \{ 1, 2, 4, 14, 28 \}$$

قواسم العدد 75 هي :

### الجواب :

(1) مضاعفات العدد 12 هي :

$$M_{12} = \{ 12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots \}$$

مضاعفات العدد 8 هي :

$$M_8 = \{ 8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots \}$$

$$\text{ppmc}(12, 8) = 24 \quad \text{إذن}$$

(2) مضاعفات العدد 9 هي :

$$M_9 = \{ 9, 18, 27, 36, 45, 54, \dots \}$$

مضاعفات العدد 4 هي :

$$M_4 = \{ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \dots \}$$

$$\text{ppmc}(9, 4) = 36 \quad \text{إذن}$$

(3) مضاعفات العدد 5 هي :

$$M_5 = \{ 5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots \}$$

مضاعفات العدد 20 هي :

$$M_{20} = \{ 20, 40, 60, 80, \dots \}$$

$$\text{ppmc}(5, 20) = 20 \quad \text{ومنه}$$

### تمرين 5 :

1 - بين أن  $n^2 + n$  عدد زوجي لكل  $n \in \mathbb{N}$

2 - بين أنه إذا كان  $n$  زوجي فإن  $n^2$  عدد

زوجي حيث  $n \in \mathbb{N}$

### الجواب :

1 - ليكن  $n \in \mathbb{N}$  لدينا

$$86625 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \quad \text{وبالتالي}$$

تفكيك العدد 2225

$$\begin{array}{r|l} 2225 & 5 \\ 445 & 5 \\ 89 & 89 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{وبالتالي } 2225 = 5^2 \cdot 89 \quad \text{(العدد 89 عدد$$

أولي)

تفكيك العدد 1449

$$\begin{array}{r|l} 1449 & 3^2 \\ 161 & 7 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

$$1449 = 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \quad \text{وبالتالي}$$

تفكيك العدد 735

$$\begin{array}{r|l} 735 & 5 \\ 147 & 7 \\ 21 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$735 = 5 \cdot 7^2 \cdot 3 \quad \text{وبالتالي}$$

### تمرين 4 :

حدد المضاعف المشترك الأصغر للعددين

$a$  و  $b$  في كل حالة :

$$(1) \quad a = 12 \quad ; \quad b = 8$$

$$(2) \quad a = 3 \quad ; \quad b = 4$$

$$(3) \quad a = 5 \quad ; \quad b = 20$$

### الجواب :

ليكن  $n$  عدد صحيح طبيعي بحيث  $n^2$  زوجي

نفترض أن  $n$  فردي إذن  $n = 2k + 1$

حيث  $k \in \mathbb{N}$

$$n^2 = (2k + 1)^2 \quad \text{ومنه}$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$n^2 = 2p + 1 \quad \text{إذن}$$

$$p = 2k^2 + 2k \quad \text{حيث}$$

وبالتالي  $n^2$  عدد فردي وهذا يناقض كون

$n^2$  زوجي .

إذن الافتراض الأول خاطئ ومنه  $n$  عدد

زوجي.

### تمارين 7 :

ليكن  $a = 27$  و  $b = 24$

1 - حدد القاسم المشترك الأكبر لـ  $a$  و  $b$

والمضاعف المشترك الأصغر لـ  $a$  و  $b$

2 - تحقق أن

$$\text{PGCD}(a, b) \times \text{ppmc}(a, b) = ab$$

### الجواب :

1- a- قواسم 27 هي : 1 ; 3 ; 9 ; 27

$$n^2 + n = n(n + 1)$$

إذا كان  $n$  زوجي فإن  $n = 2k$  فإن  $k \in \mathbb{N}$

$$n^2 + n = 2k(2k + 1) \quad \text{إذن}$$

$$= 2p$$

$$p = k(2k + 1) \quad \text{حيث}$$

ومنه  $n^2 + n$  زوجي .

إذا كان  $n$  فردي فإن  $n = 2k + 1$

فإن  $k \in \mathbb{N}$

$$n^2 + n = (2k + 1)(2k + 1 + 1) \quad \text{إذن}$$

$$= (2k + 1)(2k + 2)$$

$$= 2(2k + 1)(k + 1)$$

$$= 2p'$$

$$p' = (2k + 1)(k + 1) \quad \text{حيث}$$

ومنه  $n^2 + n$  عدد زوجي .

إذن في الحالتين فإن  $n^2 + n$  عدد زوجي .

2 - ليكن  $n \in \mathbb{N}$  بحيث  $n$  عدد زوجي إذن

$$n = 2p \quad \text{حيث } p \in \mathbb{N}$$

$$n^2 = 4p^2 = 2(2p^2) \quad \text{ومنه}$$

$$= 2k \quad \text{حيث } k = 2p^2$$

وبالتالي  $n^2$  عدد زوجي .

### تمارين 6 :

ليكن  $n$  عدد صحيح طبيعي

بين أنه إذا كان  $n^2$  زوجي فإن  $n$  عدد زوجي

بين أن  $\frac{39}{380}$  كسر غير قابل للاختزال.

### الجواب :

1 - لدينا  $a \wedge b = 1$

ليكن  $d$  القاسم المشترك الأكبر لـ  $b$  و  $a + b$

إذن  $d$  يقسم  $b$  و  $a + b$

ومنه  $d$  يقسم  $a + b - b$  أي  $a$

إذن  $d$  يقسم  $a$  و  $b$

إذن  $d$  يقسم  $a \wedge b = 1$

ومنه  $d = 1$  وبالتالي :  $(a + b) \wedge b = 1$

لدينا  $a \wedge b = 1$

ليكن  $d$  القاسم المشترك الأكبر لـ  $a + b$

و  $ab$ .

إذن  $d$  يقسم  $ab$  ويقسم  $a + b$

ومنه  $d$  يقسم  $ab$  ويقسم  $a(a + b)$

إذن  $d$  يقسم  $a(a + b) - ab$

أي  $d$  يقسم  $a^2$ .

كذلك  $d$  يقسم  $ab$  و  $b(a + b)$

ومنه  $d$  يقسم  $b(a + b) - ab$

أي  $d$  يقسم  $b^2$

إذن  $d$  يقسم  $a^2$  و  $b^2$

ومنه  $d$  يقسم  $a^2 \wedge b^2 = 1$  وبالتالي  $d = 1$

ومنه  $(a + b) \wedge ab = 1$

قواسم 24 هي :

24 ; 12 ; 8 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1

إذن  $\text{PGCD}(24, 27) = 3$

لدينا  $24 = 3 \cdot 2^3$  و  $27 = 3^3$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لـ 24 و 27

هو :  $m = 3^3 \cdot 2^3 = 216$

ومنه  $\text{ppmc}(27, 24) = 216$

2 - لدينا :

$\text{PGCD}(a, b) \times \text{ppmc}(a, b) = 216 \cdot 3$

$= 648$

$ab = 27 \cdot 24 = 648$

وبالتالي :

$\text{PGCD}(a, b) \times \text{ppmc}(a, b) = ab$

### تمرين 8 :

$a$  و  $b$  عددان صحيحان طبيعيان أوليان

فيما بينهما .

1 - بين أن :

$(a + b) \wedge b = 1$

$(a + b) \wedge b = 1$  (نقبل أن  $a^2 \wedge b^2 = 1$ )

2 - بين أن :  $(n + 1) \wedge (n + 2) = 1$

ثم استنتج أن كسر غير

$\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$

قابل للاختزال.

b - تطبيق :

$$b = 20 \quad ; \quad a = 5 \quad (3)$$

### الجواب :

$$a = 12 = 3 \cdot 2^2 \quad \text{لدينا (1)}$$

$$b = 8 = 2^3$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر هو :

$$a \vee b = 3^2 \cdot 2^2 = 24$$

$$a = 9 = 3^2 \quad \text{لدينا (2)}$$

$$b = 4 = 2^2$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لـ 9 و 4

$$a \vee b = 3^2 \cdot 2^2 = 36 \quad \text{هو :}$$

$$a \vee b = 36 \quad \text{وبالتالي :}$$

(3) لدينا 5 تقسم 20 إذن المضاعف

المشترك الأصغر لـ 5 و 20 هو :

$$20 \vee 5 = 20$$

### تمرين 10 :

حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y في

الحالات التالية وذلك باستعمال خوارزمية

أقليدية

(طريقة القسمة المتتالية) :

$$y = 1085 \quad ; \quad x = 837 \quad - 1$$

$$y = 9615 \quad ; \quad x = 5128 \quad - 2$$

$$y = 1515 \quad ; \quad x = 1789 \quad - 3$$

$$(n + 1) \wedge (n + 2) = d \quad \text{نضع } - a - 2$$

إذن d يقسم n + 1 و d يقسم n + 2

$$\text{ومنه } d \text{ يقسم } (n + 2) - (n + 1) = 1$$

ومنه d = 1 وبالتالي :

$$(n + 2) \wedge (n + 1) = 1$$

نضع a = n + 1 و b = n + 2

$$\text{لدينا } a \wedge b = 1$$

$$\text{إذن } (a + b) \wedge ab = 1$$

$$(2n + 3) \wedge (n^2 + 3n + 2) = 1 \quad \text{أي}$$

$$\text{لأن } a + b = 2n + 3$$

$$\text{و } ab = n^2 + 3n + 2$$

ومنه  $\frac{2n + 3}{n^2 + 3n + 2}$  كسر غير قابل للاختزال.

$$-b- \text{ لنحدد } n \text{ بحيث } 2n + 3 = 39$$

$$\text{إذن } n = 18$$

$$\text{لدينا } 2n + 3 = 39$$

$$n^2 + 3n + 2 = 380$$

وبما أن  $\frac{2n + 3}{n^2 + 3n + 2}$  غير قابل للاختزال

$$\text{فإن } \frac{39}{380} \text{ غير قابل للاختزال}$$

### تمرين 9 :

حدد المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b في

كل حالة :

$$(1) \quad b = 8 \quad ; \quad a = 12$$

$$(2) \quad b = 4 \quad ; \quad a = 9$$

المرحلة	x	y	الباقي
1	1515	1789	274
2	274	1515	145
3	145	274	129
4	129	145	16
5	16	129	1
6	1	16	0

$$1789 = 1515 \times 1 + 274$$

$$1515 = 274 \times 5 + 145$$

$$274 = 145 \times 1 + 129$$

$$145 = 129 \times 1 + 16$$

$$129 = 16 \times 8 + 1$$

$$16 = 16 \times 1 + 0$$

$$1789 \wedge 1515 = 1 \quad \text{وبالتالي}$$

### تمرين 11:

1 - حدد  $d = \text{PGCD}(102, 119)$

2 - تحقق من أن  $\frac{102}{d}$  و  $\frac{119}{d}$  أوليين فيما بينهما.

### الجواب:

1- لدينا  $199 = 102 \times 1 + 17$

$$102 = 17 \times 6 + 0$$

إذن حسب خوارزمية أقليدية فإن :

$$\text{PGCD}(102, 119) = 17$$

### الجواب:

1 - لنحدد  $1085 \wedge 837$

المرحلة	x	y	الباقي
1	837	1085	248
2	248	837	93
3	93	248	62
4	62	93	31
5	31	62	0

$$1085 = 837 \times 1 + 248$$

$$837 = 248 \times 3 + 93$$

$$248 = 93 \times 2 + 62$$

$$93 = 62 \times 1 + 31$$

$$62 = 31 \times 2 + 0$$

$$1085 \wedge 837 = 31 \quad \text{وبالتالي}$$

2 - لنحدد  $9615 \wedge 5128$

المرحلة	x	y	الباقي
1	5128	9615	4487
2	4487	5128	641
3	641	4487	0

$$9615 = 5128 \times 1 + 4487$$

$$5128 = 4487 \times 1 + 641$$

$$4487 = 641 \times 7 + 0$$

$$9615 \wedge 5128 = 641 \quad \text{وبالتالي}$$

3 - لنحدد  $1789 \wedge 1515$

ب - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ  
47223 و 2332

$$47223 = 2332 \times 20 + 583$$

$$2332 = 583 \times 4 + 0$$

$$47223 \wedge 2332 = 583 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{3172}{915} = \frac{583 \times 4}{583 \times 81} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{2332}{47223} = \frac{4}{81} \quad \text{ومنه}$$

ب - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ :  
30227 و 36019

$$36019 = 30227 \times 1 + 5792$$

$$30227 = 5792 \times 5 + 1267$$

$$5792 = 1267 \times 4 + 724$$

$$1267 = 724 \times 1 + 543$$

$$724 = 543 \times 1 + 181$$

$$543 = 181 \times 3 + 0$$

$$30227 \wedge 36019 = 181 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{30227}{36019} = \frac{167 \times 181}{199 \times 181} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{30227}{36019} = \frac{167}{199} \quad \text{ومنه}$$

### تمرين 13 :

حدد عددين صحيحين طبيعيين x و y بحيث:

$$xy = 3x + 2y$$

$$2 - \text{لدينا } \frac{119}{17} = 7 \text{ و } \frac{102}{17} = 6$$

$$6 \text{ و } 7 \text{ متتابعان إذن } 6 \wedge 7 = 1$$

$$\frac{119}{d} \wedge \frac{102}{d} = 1 \quad \text{ومنه}$$

$$\text{أي } \frac{119}{d} \text{ و } \frac{102}{d} \text{ أوليان فيما بينهما .}$$

### تمرين 12 :

أجعل النسبة غير قابلة للأختزال في

الحالات التالية :

$$\frac{3172}{915} \quad \text{أ -}$$

$$\frac{2332}{47223} \quad \text{ب -}$$

$$\frac{30227}{36019} \quad \text{ج -}$$

### الجواب :

أ - لنحدد القاسم المشترك الأكبر لـ 3172  
و 915

$$3172 = 3 \times 915 + 427$$

$$915 = 2 \times 427 + 61$$

$$427 = 7 \times 61 + 0$$

$$915 \wedge 3172 = 61 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{3172}{915} = \frac{61 \times 52}{61 \times 15} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{3172}{915} = \frac{52}{15} \quad \text{إذن}$$

### الجواب :

1 - إذا كان  $n = 9$  فإن :

$$F = \frac{9+9}{9-6} = \frac{18}{3} = 6$$

إذا كان  $n = 25$  فإن :

$$F = \frac{25+9}{25-6} = \frac{34}{19}$$

وهذا هو الشكل المختزل لـ  $F$  لأن  $F$  لأن 34

و 19 أوليان فيما بينهما.

إذا كان  $n = 46$  فإن :

$$F = \frac{46+9}{46-6} = \frac{55}{40} = \frac{11}{8}$$

وهذا الشكل المختزل لـ  $F$ .

2 - لدينا

$$1 + \frac{15}{n-6} = \frac{n-6+15}{n-6} = \frac{n+9}{n-6} = F$$

$$F = 1 + \frac{15}{n-6} \quad \text{وبالتالي}$$

$$F = 1 + \frac{15}{n-6} \quad \text{3 - لدينا}$$

$$1 + \frac{15}{n-6} \in \mathbb{N} \quad \text{تكافئ} \quad F \in \mathbb{N}$$

$$\frac{15}{n-6} \in \mathbb{N} \quad \text{تكافئ}$$

يعني  $n - 6$  تقسم 15

يعني

$$n-6=1 \text{ أو } n-6=3 \text{ أو } n-6=5 \text{ أو } n-6=15$$

يعني

$$n=7 \text{ أو } n=9 \text{ أو } n=11 \text{ أو } n=21$$

إذن  $F \in \mathbb{N}$  إذا فقط إذا كان :

$$n=7 \text{ أو } n=9 \text{ أو } n=11 \text{ أو } n=21$$

### الجواب :

$$xy - 3x = 2y \quad \text{يعني} \quad xy = 3x + 2y$$

$$x(y - 3) = 2y - 6 + 6 \quad \text{يعني}$$

$$x(y - 3) = 2(y - 3) + 6 \quad \text{يعني}$$

$$x(y - 3) - 2(y - 3) = 6 \quad \text{يعني}$$

$$(y - 3)(x - 2) = 6 \quad \text{يعني}$$

$$(y - 3)(x - 2) = 2 \times 3 = 1 \times 6 \quad \text{يعني}$$

$$y - 3 = 3 \quad \text{و} \quad x - 2 = 2 \quad \text{يعني}$$

$$y - 3 = 1 \quad \text{و} \quad x - 2 = 6 \quad \text{أو}$$

$$y = 6 \quad \text{و} \quad x = 4 \quad \text{يعني}$$

$$y = 4 \quad \text{و} \quad x = 8 \quad \text{أو}$$

$$S = \{(4, 6); (8, 4)\} \quad \text{إذن}$$

### تمرين 14 :

ليكن  $n$  عدد صحيح طبيعي .

$$F = \frac{n+9}{n-6} \quad \text{نضع}$$

1 - حدد في كل حالة الشكل المختزل لـ  $F$

$$n = 46 \quad ; \quad n = 25 \quad ; \quad n = 9$$

$$2 - \text{بين أن} \quad F = 1 + \frac{15}{n-6}$$

3 - حدد جميع قيم  $n$  التي من أجلها يكون  $F$

عدد صحيح طبيعي .