

- * حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ هي أفالصيل نقط تقاطع المنحنيين (C_g) و (C_f)
- * حلول المتراجحة $f(x) \leq g(x)$ مثلا هي أفالصيل نقط المستوى (P) التي يكون (C_f) تحت (C_g)

تمارين و حلولها

تمرين 1 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = -x^2 + 2$ و (\mathcal{E}) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متواحد ومنظم (\vec{J}, \vec{i}, O) و $\Omega(0, 2)$

- حدد معادلة ديكارتية لـ (\mathcal{E}) في المعلم (\vec{J}, \vec{i}, O) .
- حدد نقط تقاطع (\mathcal{E}) مع محوري المعلم.
- أنشئ المنحنى (\mathcal{E}) في المعلم (\vec{J}, \vec{i}, O) .
- استنتج جدول تغيرات f .
- حل مبيانا المتراجحتين $0 \leq f(x) < 1$.

الجواب :

1 - معادلة المنحنى (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{J}) هي

$$y = -x^2 + 2 \quad \text{يعني}$$

$$y - 2 = -x^2 \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

معادلة (C_f) تصبح $Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{J})$ حيث $\Omega(0, 2)$

أ - يقطع محور الأراتيب في $I(0, f(0))$ أي $I(0, 2)$

$$-x^2 + 2 = 0 \quad \text{يعني} \quad f(x) = 0$$

$$x^2 = 2 \quad \text{يعني}$$

$$x = \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{2} \quad \text{يعني}$$



تمرين 2:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x^2 - 2x$$

(C) منحى الدالة f في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$$\Omega(1, -1)$$

1 - حدد معادلة ديكارتية لـ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - حدد نقط تقاطع (Cf) مع محوري المعلم

ب - أنشئ (Cf) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

3 - حل مبيانا المترافقين :

$$f(x) \geq 3 \quad \text{و} \quad f(x) \leq 0$$

الجواب:

1 - معادلة (Cf) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$$y = f(x) \quad \text{هي :}$$

$$y = x^2 - 2x \quad \text{يعني}$$

$$y + 1 = x^2 - 2x + 1 \quad \text{يعني}$$

$$y + 1 = (x - 1)^2 \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 1 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

معادلة (Cf) في المعلم هي $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(1, -1)$

2 - نقطة تقاطع (Cf) مع محور الأراتيب هي

$$O(0, 0) \quad \text{أي} \quad O(0, f(0))$$

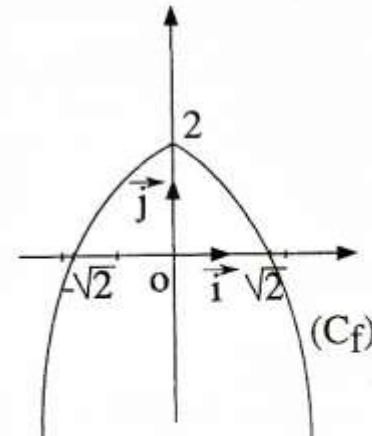
$$x^2 - 2x = 0 \quad \text{أي} \quad f(x) = 0$$

$$x(x - 2) = 0 \quad \text{يعني}$$

و منه (C_f) يقطع محور الأفاتصيل في $A(\sqrt{2}, 0)$ و $B(-\sqrt{2}, 0)$

ب - معادلة (C_f) هي $Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ إذن (C_f) عبارة عن شلجم رأسه Ω موجه نحو الأسفل

يمكن الوصول لهذه النتيجة كالآتي (C_f) شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ أي $\Omega(0, 2)$ موجه نحو الأسفل.



ج - جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		2	

3 - $f(x) \geq 0$ يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق محور الأفاتصيل

$$S = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$f(x) < 0$ يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) تحت محور الأفاتصيل إذن :

$$S =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$$



والمنظم $\Omega(1, 1)$ و (O, \vec{i}, \vec{j})

1 - حدد معادلة ديكارتية لـ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - أ - حدد تقاطع (C) مع محوري المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})

ب - أنشئ (C) في المعلم (\vec{i}, \vec{j})

3 - اعط جدول تغيرات f

4 - حل مبيانا المتراجحة $f(x) \leq 0$

$f(x) = m$ - حدد مبيانا عدد حلول المعادلة
حيث m بارامترى حقيقي.

الجواب :

1 - معادلة (C) في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) هي :

$$y = f(x)$$

$y = 2x^2 - 4x + 3$ يعني :

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

نضع

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

أي

المعادلة في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) حيث $(1, 1)$ تكافيء

$$Y + 1 = 2(X + 1)^2 - 4(X + 1) + 3$$

يعني

$$Y + 1 = 2(X^2 + 2X + 1) - 4X - 4 + 3$$

$$Y + 1 = 2X^2 + 4X + 2 - 4X - 4 + 3$$

$$Y + 1 = 2X^2 + 1$$

$$Y = 2X^2$$

$x = 2$ أو $x = 0$ يعني إذن (C_f) يقطع محور الأفاسيل في :

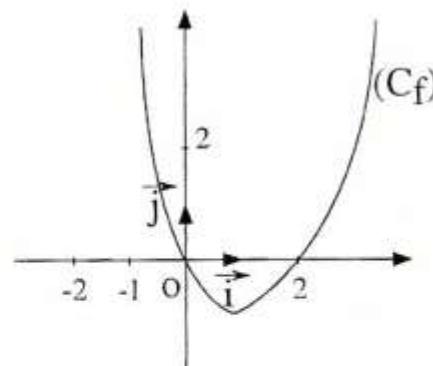
$A(2, 0)$ و $O(0, 0)$

ب - معادلة (C_f) في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) هي :

$$Y = X^2$$

إذن (C_f) شكل رأسه Ω ووجه نحو الأعلى طريقة 2 :

شكل رأسه $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ أي (C_f) شكل رأسه $(1, -1)$ وجه نحو الأعلى.



- 3 - $f(x) \leq 0$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) تحت محور الأفاسيل

$$S = [0, 2]$$

- 0 $f(x) \geq 0$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق محور الأفاسيل

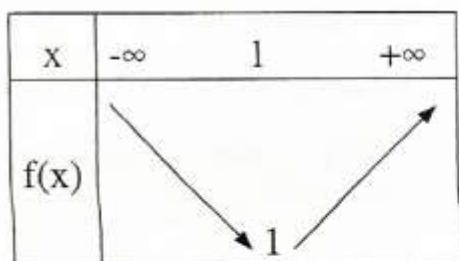
$$S =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$$

تمرين 3 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ :

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

ليكن (C) منحني الدالة f في المعلم المتعامد



4 - لدينا $f(x) \leq 0$ يعني x يوجد في المجالات التي يكون فيها (C) تحت محور الأفاصيل.

وما أن (C) يوجد فوق محور الأفاصيل

$$S = \emptyset \quad \text{فإن}$$

5 - لدينا : $f(x) = m$ يعني x أقصول نقطة تقاطع (C) مع المستقيم $y = m$ (Δ)
إذا كان $m = 1$ هناك حل وحيد وهو $x = 1$ لأن (Δ) يقطع (C) مرة واحدة.

إذا كان $m < 1$ ليس هناك حل لأن (C) و(Δ) لا يتقاطعان.

إذا كان $m > 1$ هناك حلين مختلفين لأن (Δ) يقطع (C) مرتين.

تمرين 4:

لتكن الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = -2x^2 + 2x - 1$$

و (C) قليلها المياني في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{و } (\Omega, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

1 - حدد معادلة ديكارتية لـ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - أنشئ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

3 - نعتبر الدالة g المعرفة بـ :

معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ هي

2 - آ - نقط تقاطع C_f ومحور الأراتيب هي :

$$A(0, 3) \quad \text{أي أن } A(0, f(0))$$

لتحديد نقط تقاطع (C_f) ومحور الأفاصيل نحل المعادلة :

$$2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$= 16 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

$$= -8 < 0$$

إذن (C_f) لا يقطع محور الأفاصيل

ج - (C_f) شلجم رأسه $(1, 1)$ Ω ومحور

ثالثة المستقيم ذو المعادلة $x = 1$

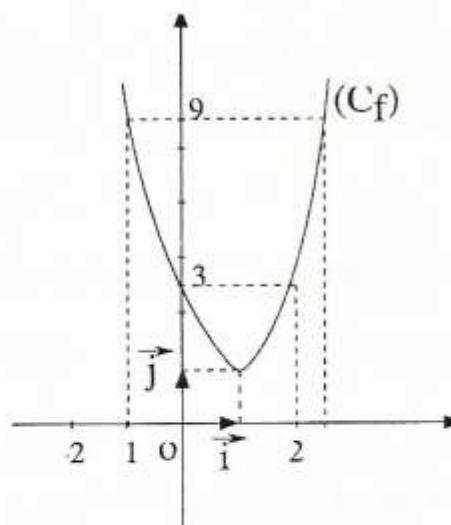
طريقة 2

Shellجم رأسه $(\Omega, \frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ أي

$$\Omega(1, -1)$$

لدينا

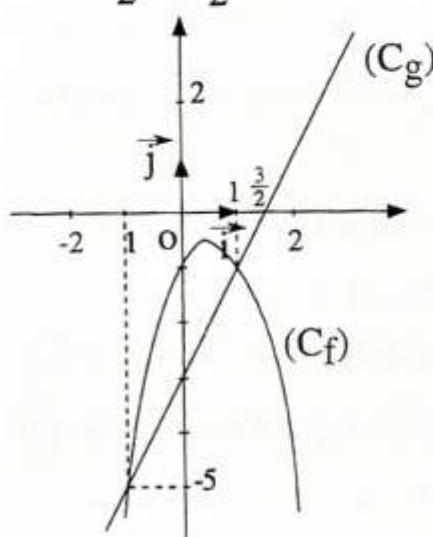
x	-1	0	1	2	3
f(x)	9	3	1	3	9



3 - جدول تغيرات f من خلال المنحنى

طريقة 2 :

$$\Omega \left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) \right) \text{ شلجم رأسه } (C_f)$$



$$y = 2x - 3 \text{ مستقيم معادله } - 3$$

ب - $g(x) \leq f(x)$ يعني x توجد في المجال

الذي يكون فيه (C') تحت (C) إذن

$$S = [-1, \frac{3}{2}]$$

تمرين 5:

تعبر الدالة العددية f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

(C) المحنى المثل للدالة f في معلم متعمد

$$(O, \vec{i}, \vec{j})$$

1 - حدد نقط تقاطع (C) مع محور الأفاسيل

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$$

لكل $x \in \mathbb{R}$

أ - بين أنه لكل x_1 و x_2 من \mathbb{R} بحيث

$x_1 \neq x_2$ لدينا :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4)$$

$$g(x) = 2x - 3$$

أ - أنشى (C') محنى g في نفس المعلم (\vec{i}, \vec{j})

ب - حل مبایانا المتراجحة $g(x) \leq f(x)$

الجواب :

1 - معادلة (C) في المعلم (\vec{i}, \vec{j})

$y = f(x)$ هي

$y = -2x^2 + 2x - 1$ يعني

$$\Omega \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ نضع}$$

$$\begin{cases} x = X + \frac{1}{2} \\ y = Y - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ يعني}$$

معادلة (C) تكافى

$$Y - \frac{1}{2} = -2(X + \frac{1}{2})^2 + 2(X + \frac{1}{2}) - 1$$

$$Y - \frac{1}{2} = -2(X^2 + X + \frac{1}{4}) + 2X + 1 - 1$$

$$Y - \frac{1}{2} = -2X^2 - 2X - \frac{1}{2} + 2X \text{ يعني}$$

$$Y = -2X^2 \text{ يعني}$$

إذن معادلة (C) في المعلم (\vec{i}, \vec{j})

$$Y = -2X^2 \text{ هي}$$

2 - معادلة (C) في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) هي

$Y = -2X^2$ إذن (C) شلجم رأسه Ω وموجه نحو الأسفل



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{2}(x_1 + 2)^2 - 2 - \frac{1}{2}(x_2 + 2)^2 + 2}{x_1 - x_2} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(x_1 + 2 - x_2 - 2)(x_1 + 2 + x_2 + 2)}{x_1 - x_2} \\
 &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4)}{2(x_1 - x_2)}
 \end{aligned}$$

وبالتالي :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4)$$

ب - في المجال $[-\infty, -2]$

إذن $\begin{cases} x_1 \leq -2 \\ x_2 \leq -2 \end{cases}$ لدينا

$$x_1 + x_2 \leq -4$$

$$x_1 + x_2 + 4 \leq 0 \quad \text{يعني}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4) \leq 0$$

إذن f تناقصية على $[-\infty, -2]$

في المجال $[-2, +\infty]$

إذن $\begin{cases} x_1 \geq -2 \\ x_2 \geq -2 \end{cases}$ لدينا

$$x_1 + x_2 \geq -4$$

$$x_1 + x_2 + 4 \geq 0 \quad \text{إذن}$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4) \geq 0 \quad \text{و منه}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \quad \text{أي}$$

إذن f تزايدية على $[-2, +\infty]$

4 - معادلة (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})

ب - استنتاج رتبة الدالة f على المجالين

$[-2, +\infty]$ و $[-\infty, -2]$

4 - لتكن $(-2, -2)$ نقط من المستوى (P).

بين أن معادلة (C) هي $Y = \frac{1}{2}X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

5 - أنشئ المحنى (C)

6 - حل مبيانا المراجحة $x^2 + 4x > 0$

الجواب :

1 - لدينا $\frac{1}{2}x^2 + 2x = 0$ يعني $f(x) = 0$

$x(\frac{1}{2}x + 2) = 0$ يعني

$\frac{1}{2}x + 2 = 0$ أو $x = 0$ يعني

$x = -4$ أو $x = 0$ يعني

إذن المحنى (C) يقطع محور الأفاسيل في

$A(-4, 0)$ و $O(0, 0)$

2 - لدينا

$$\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) - 2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 - 2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x = f(x)$$

وبالتالي : $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2$

3 - أ - لتكن x_1 و x_2 من \mathbb{R} بحيث $x_1 \neq x_2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

1 - حدد مجموعة التعريف D_f

2 - بين أن :

$$x \in D_f \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x-1} \quad \text{لكل}$$

3 - حدد طبيعة المحنى (C_f). حيث

محنى f في معلم متعامد ومنظم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$

4 - أنشئ المحنى (C_f)

5 - اعط جدول تغيرات f

الجواب :

$$x - 1 \neq 0 \quad x \in D_f \quad \text{لدينا} \quad 1$$

$$x \neq 1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{إذن}$$

2 - لدينا

$$2 + \frac{1}{x-1} - \frac{2x-2+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1} = f(x)$$

$$x \in D_f \quad \text{لكل} \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$$

3 - معادلة في المعلم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

$$y = 2 + \frac{1}{x-1}$$

$$y - 2 = \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$Y = \frac{1}{X} \quad \text{المعادلة تصبح}$$

في المعادلة $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ حيث

4 - المحنى (C_f) هذلول مركزه $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{2}{1})$

ومقارباه المستقيمان $x = 1$ و $y = 2$ $\Omega(1, 2)$

$y = f(x)$ هي

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 \quad \text{يعني}$$

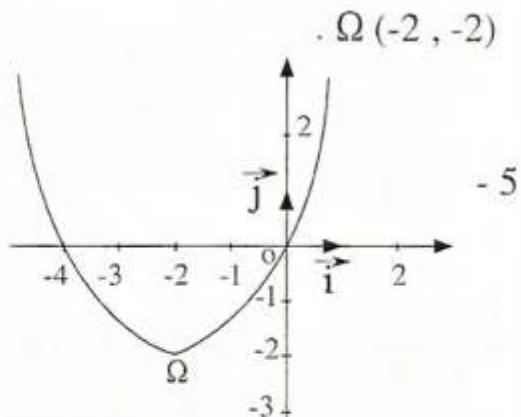
$$y + 2 = \frac{1}{2}(x+2)^2 \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y + 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$Y = \frac{1}{2}X^2 \quad \text{المعادلة تصبح}$$

في المعلم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ حيث

أي $\Omega(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ شلجم رأسه (C_f) - 5



- 6

$$\frac{1}{2}(x^2 + 4x) > 0 \quad \text{يعني} \quad x^2 + 4x > 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x > 0 \quad \text{يعني}$$

$$f(x) > 0 \quad \text{يعني}$$

يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C)

فوق محور الأفاسيل

$$S =]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[\quad \text{إذن}$$

تمرين 6 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

(O, \vec{i} , \vec{j})

5 - أنشى (C_f) و (C_g) في معلمين مختلفين.

الجواب :

$x - 2 \neq 0$ يعني $x \in D_f$ لدينا 1

$$x \neq 2$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

إذن

$x - 1 \neq 0$ يعني $x \in D_g$ لدينا

$$x \neq 1$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

إذن

2 - تغيرات f

ليكن x و y من D_f بحيث

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \left(\frac{2x + 3}{x - 2} - \frac{2y + 3}{y - 2} \right) \times \frac{1}{x - y} \\ &= \left(\frac{2xy - 4x + 3y - 6 - 2xy - 3x + 4y + 6}{(x - 2)(y - 2)} \right) \\ &\times \frac{1}{x - y} \end{aligned}$$

$$= \frac{-7x + 7y}{(x - 2)(y - 2)(x - y)}$$

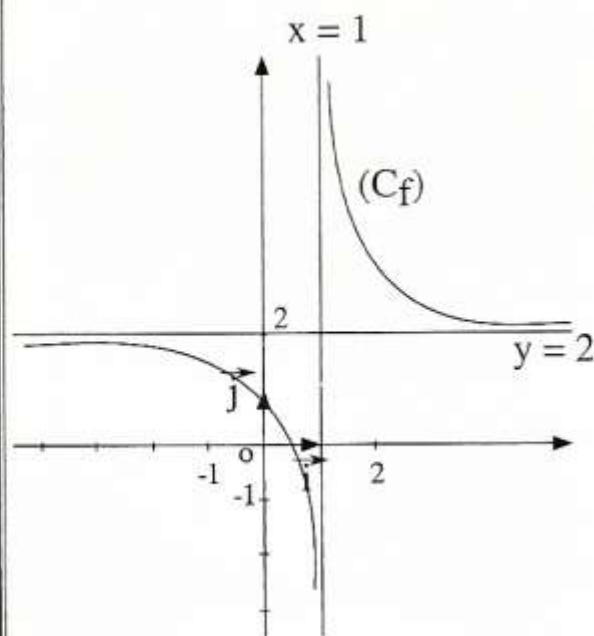
$$= \frac{-7(x - y)}{(x - 2)(y - 2)(x - y)}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-7}{(x - 2)(y - 2)} \quad \text{إذن}$$

في المجال $[2, +\infty[$

$$\text{إذن } \begin{cases} x > -2 \\ y > -2 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ y - 2 > 0 \end{cases}$$



5 - من خلال منحني الدالة f فإن جدول التغيرات هو :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

تمرين 7 :

لتكن الدالتين f و g المعرفتين بما يلى :

$$g(x) = \frac{-x + 2}{x - 1} \quad f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2}$$

1 - حدد مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g

2 - اعط جدول تغيرات كل من f و g .

3 - حدد طبيعة كل من المنحنيين (C_f) و (C_g)

أ - حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

$$(O, \vec{i}, \vec{j})$$

ب - حدد نقط تقاطع (C_g) مع محوري المعلم



$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \frac{-1}{(x - 1)(y - 1)}$$

في المجال $[1, +\infty[$

إذن

$$\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$$

لدينا

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases}$$

$$(x - 1)(y - 1) > 0$$

ومنه

$$\frac{-1}{(x - 1)(y - 1)} < 0$$

إذن

وبالتالي g تناقصية على $[1, +\infty[$
في المجال $]-\infty, 1[$

إذن

$$\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$$

لدينا

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$$

$$(x - 1)(y - 1) > 0$$

ومنه

$$\frac{-1}{(x - 1)(y - 1)} < 0$$

إذن

وبالتالي g تناقصية على $]-\infty, 1[$
جدول تغيرات g هو :

X	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$			

(O, \vec{i} , \vec{j}) في المعلم (C_f) معادلة - 3

$$y = f(x)$$

هي :

$$y = \frac{2x + 3}{x - 2}$$

يعني

$$y = \frac{2(x - 2) + 7}{x - 2}$$

يعني

$$(x - 2)(y - 2) > 0$$

$$\frac{-7}{(x - 2)(y - 2)} < 0$$

ومنه f تناقصية على $]2, +\infty[$
في المجال $]-\infty, 2[$

$$\begin{cases} x < 2 \\ y < 2 \end{cases}$$

لدينا

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ y - 2 < 0 \end{cases}$$

$$(x - 2)(y - 2) > 0$$

إذن

$$\frac{-7}{(x - 2)(y - 2)} < 0$$

إذن f تناقصية على $]-\infty, 2[$
جدول تغيرات f

X	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

تغيرات $: g$

ليكن x و y من Dg بحيث $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{g(x) - g(y)}{x - y} &= \left(\frac{-x + 2}{x - 1} - \frac{-y + 2}{y - 1} \right) \times \frac{1}{x - y} \\ &= \frac{(-x + 2)(y - 1) - (x - 1)(-y + 2)}{(x - 1)(y - 1)} \times \frac{1}{x - y} \\ &= \frac{-xy + x + 2y - 2 + xy - 2x - y + 2}{(x - 1)(y - 1)} \times \frac{1}{x - y} \\ &= \frac{-x + y}{(x - 1)(y - 1)} \times \frac{1}{x - y} \\ &= \frac{-(x - y)}{(x - 1)(y - 1)} \times \frac{1}{x - y} \end{aligned}$$

أو مباشرة (C_g) هذلول مركزه $\Omega(1, -\frac{1}{2})$

مقارباه $y = -1$ أو $x = 1$

أ - نقط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل

$$\frac{2x+3}{x-2} = 0 \quad \text{يعني} \quad f(x) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{يعني}$$

إذن $I(-\frac{3}{2}, 0)$ يقطع محور الأفاصيل في

$J(0, f(0))$ يقطع محور الأراتيب في :

$$\text{أي } J(0, -\frac{3}{2})$$

ب - نقط تقاطع (C_g) مع محور الأفاصيل

$$\frac{-x+2}{x-1} = 0 \quad \text{يعني} \quad g(x) = 0$$

$$-x + 2 = 0 \quad \text{يعني}$$

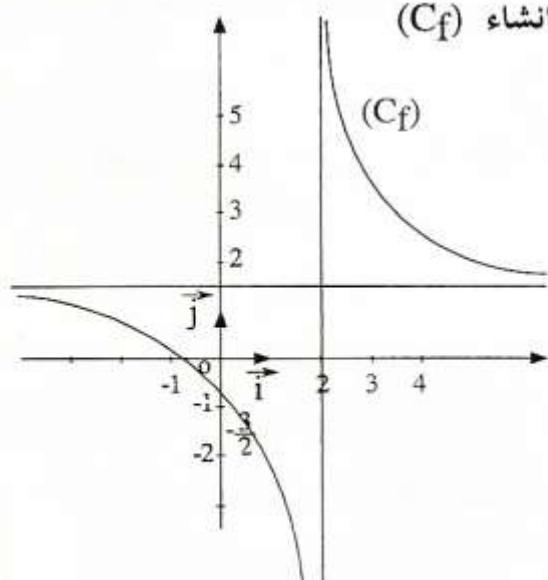
$$x = 2 \quad \text{يعني}$$

إذن $I(2, 0)$ يقطع محور الأفاصيل في

$J'(0, g(0))$ يقطع محور الأراتيب في

$$\text{أي } J'(0, -2)$$

5 - إنشاء (C_f)



$$y = \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{7}{x-2} \quad \text{يعني}$$

$$y = 2 + \frac{7}{x-2} \quad \text{يعني}$$

$$y - 2 = \frac{7}{x-2} \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

المعادلة تصبح (A, \vec{i}, \vec{j}) في المعلم $Y = \frac{7}{X}$ حيث $A(2, 2)$

وبالتالي (C_f) هذلول مركزه A ومقارباه

المستقيمان $y = 2$ و $x = 2$

طريقة 2 :

هذلول مركزه $A(2, \frac{2}{1})$ ومقارباه

$y = 2$ و $x = 2$

معادلة (O, \vec{i}, \vec{j}) في المعلم (C_g) هي

$$y = g(x)$$

$$y = \frac{-x+2}{x-1} \quad \text{يعني}$$

$$y = \frac{-(x-1)+1}{x-1} \quad \text{يعني}$$

$$y = \frac{-(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} \quad \text{يعني}$$

$$y + 1 = \frac{1}{x-1} \quad \text{يعني}$$

المعادلة تصبح (B, \vec{i}, \vec{j}) في المعلم $Y = \frac{1}{X}$ حيث $B(1, -1)$

إذن (C_g) هذلول مركزه $B(1, -1)$ ومقارباه

المستقيمان $y = -1$ و $x = 1$

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{2x+3}{x} - \frac{2y+3}{y} \\ &= \frac{2xy + 3y - 2xy - 3x}{xy} \times \frac{1}{x-y} \\ &= \frac{-3(x-y)}{xy} \times \frac{1}{x-y} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = \frac{-3}{xy} \quad \text{إذن}$$

لكل x و y من $[0, +\infty]$ لدينا

$$\frac{-3}{xy} < 0 \quad \text{إذن}$$

وبالتالي f تناقصية على $[0, +\infty]$

أ - معادلة (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})

$$y = f(x) \quad \text{هي :}$$

$$y = \frac{2x+3}{x} \quad \text{يعني}$$

$$y = \frac{2x}{x} + \frac{3}{x} \quad \text{يعني}$$

$$y = 2 + \frac{3}{x} \quad \text{يعني}$$

$$y - 2 = \frac{3}{x} \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$Y = \frac{3}{X} \quad \text{إذن معادلة تصبح}$$

في المعلم $(\vec{j}, \vec{i}, \Omega)$ حيث $\Omega(0, 2)$

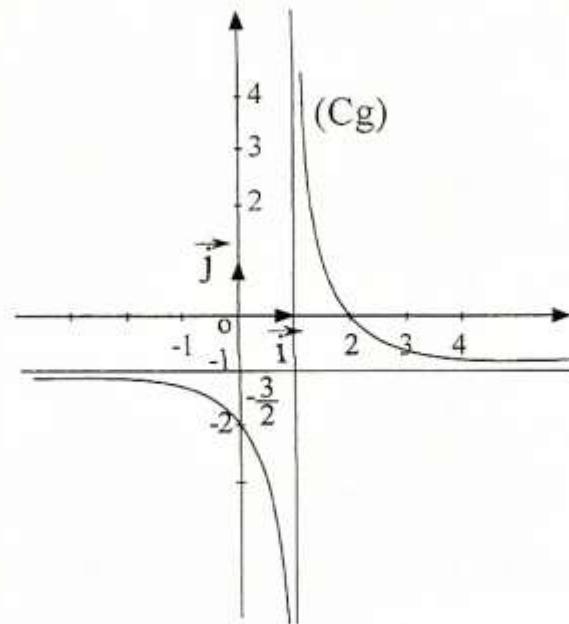
ب - المنحني (C_f) هذلول مركزه Ω ومقارباه

$$y = 2 \quad \text{و} \quad x = 0 \quad \text{المستقيمان}$$

طريقة 2 :

هذلول مركزه $(0, \frac{2}{1})$ ومقارباه (C_f)

$$y = 2 \quad \text{و} \quad x = 0$$



تمرين 8 :

لتكن الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بعاليي :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x}$$

(C) المنحنى المثل للدالة f في المعلم (\vec{j}, \vec{i}, O)

1 - حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2 - أدرس تغيرات f على المجال $[0, +\infty]$

3 - ليكن $(1, 2)$ نقطة في المعلم (\vec{j}, \vec{i}, O)

أ - بين أن معادلة (C) في المعلم $(\vec{j}, \vec{i}, \Omega)$

$$Y = \frac{3}{X} \quad \text{هي :}$$

ب - أنشئ (C) في المعلم (\vec{j}, \vec{i}, O)

الجواب :

1 - لدينا $x \neq 0$ يعني $x \in D_f$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{إذن}$$

2 - ليكن x و y من $[0, +\infty]$ بحيث $x \neq y$

الجواب :

$x + 2 \neq 0$ يعني $x \in D_f - 1$

$x \neq -2$ يعني

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

إذن

لدينا

$$\begin{aligned} 2 - \frac{4}{x+2} &= \frac{2x+4-4}{x+2} \\ &= \frac{2x}{x+2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

. Df من x لكل $f(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$ ومنه

2 - ليكن x و y من $] -2, +\infty [$ بحيث

لدينا $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} &= \frac{2 - \frac{4}{x+2} - 2 + \frac{4}{y+2}}{x-y} \\ &= \frac{\frac{-4(y+2) + 4(x+2)}{(x+2)(y+2)}}{x-y} \\ &= \frac{-4y - 8 + 4x + 8}{(x+2)(y+2)} \times \frac{1}{x-y} \\ &= \frac{4(x-y)}{(x+2)(y+2)} \times \frac{1}{x-y} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = \frac{4}{(x+2)(y+2)}$$

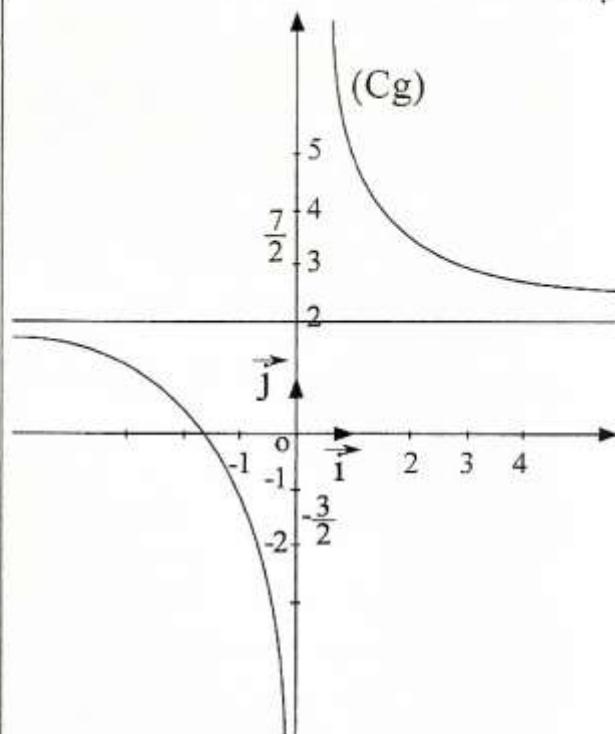
إذن

$$\text{إذن } \begin{cases} x > -2 \\ y > -2 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ y+2 > 0 \end{cases}$$

ومنه $(x+2)(y+2) > 0$ إذن

- ب



تمرين 9 :

لتكون الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$f(x) = \frac{2x}{x+2}$$

(C) المحنى المثل للدالة f في معلم متواز

ومنتظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1 - حدد مجموعة التعريف Df وتحقق أن لكل

$$f(x) = 2 - \frac{4}{x+2} : Df \text{ من } x$$

2 - أدرس تغيرات f على المجال $] -2, +\infty [$

3 - ليكن (O, \vec{i}, \vec{j}) في المعلم $\Omega (-2, 2)$

أ - بين أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$$Y = \frac{4}{X} \quad \text{هي :}$$

ب - أنشئ (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})



تمرين 10:

لتكن الدالة f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x|x| - 2x + 2$$

أ - بين أن لكل x من \mathbb{R}^+ لدينا :

$$f(x) = (x - 1)^2 + 1$$

ب - بين أن لكل x من \mathbb{R}^- لدينا :

$$f(x) = -(x + 1)^2 + 3$$

2 - أنشئ (C_f) منحى الدالة f في معلم متعمد

(O, \vec{i}, \vec{j}) ومنظم

3 - حل مبيانا المعادلة : $f(x) = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$

4 - حل مبيانا المعادلة : $1 \leq f(x) \leq 3$

الجواب :

أ - لتكن $|x| = x$ إذن $x \in \mathbb{R}^+$ لدينا :

$$f(x) = x|x| - 2x + 2 \quad \text{لدينا}$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 1$$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 1 \quad \text{إذن}$$

ب - لتكن $|x| = -x$ لدينا $x \in \mathbb{R}^-$ لدينا

$$f(x) = x|x| - 2x + 2 \quad \text{لدينا}$$

$$= x(-x) - 2x + 2$$

$$= -x^2 - 2x - 1 + 3$$

$$f(x) = -(x + 1)^2 + 3 \quad \text{إذن}$$

2 - في \mathbb{R}^+ لدينا معادلة (C_f) في المعلم

$y = f(x)$ هي

$$y = (x - 1)^2 + 1$$

يعني

$$y - 1 = (x - 1)^2$$

يعني

$$\frac{4}{(x + 2)(y + 2)} > 0$$

ومنه f تزايدية قطعا على $] -2, +\infty [$

3 - أ - معادلة (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) هي

$$y = 2 - \frac{4}{x + 2}$$

$$y - 2 = \frac{-4}{x + 2}$$

$$\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

المعادلة تصبح $\frac{Y}{X} = -\frac{4}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(2, 2)$

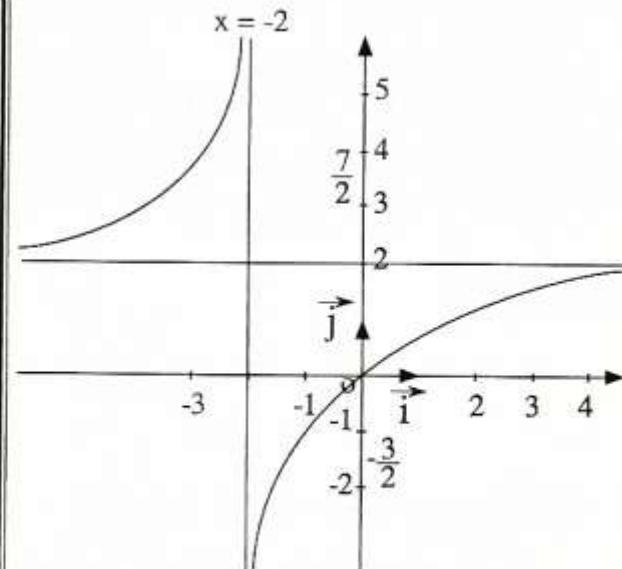
ب - عبارة عن هذلول مركزه Ω أي (C_f)

ومقارباه لمستقيمان $y = 2$ و $x = -2$

طريقة 2 :

هذلول مركزه $\Omega(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ أي (C_f)

$y = 2$ و $x = -2$ و مقارباه $\Omega(-2, 2)$



نضع $x = m - 3$ يعني $f(x) = m - 3$
والمستقيم (C_f)

إذن عدد نقط تقاطع (C_f) والمستقيم
 $y = m$ هو عدد حلول المعادلة
 $f(x) = m$

إذا كان $m < 1$ أو $m > 3$ هناك حل وحيد

إذا كان $m = 1$ أو $m = 3$ هناك حالان مختلفان

إذا كان $1 < m < 3$ هناك ثلاثة حلول مختلفة.

يعني أن $f(x) \leq 3$ مقصور بين

المستقيمين $y = 3$ و $y = 1$

لتحل أولاً المعادلة $f(x) = 3$

في المجال $[0, +\infty]$

$$(x - 1)^2 + 1 = 3 \quad \text{يعني} \quad f(x) = 3$$

$$(x - 1)^2 = 2 \quad \text{يعني}$$

$$x - 1 = -\sqrt{2} \quad \text{أو} \quad x - 1 = \sqrt{2} \quad \text{يعني}$$

$$x = 1 - \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad x = 1 + \sqrt{2} \quad \text{يعني}$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \quad \text{إذن}$$

في المجال $[-\infty, 0]$

$$x = -1 \quad \text{كافى} \quad f(x) = 3$$

لتحل المعادلة $f(x) = 1$

في المجال $[0, +\infty]$

$$x = 1 \quad \text{كافى} \quad f(x) = 1$$

في المجال $[-\infty, 0]$

$$(x + 1)^2 + 3 = 1 \quad \text{يعني} \quad f(x) = 1$$

$$-(x - 1)^2 = -2 \quad \text{يعني}$$

$$(x + 1)^2 = 2 \quad \text{يعني}$$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

معادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $(1, 1)$

في \mathbb{R}^+ إذن (C_f) جزء من الشكل الذي

معادله $Y = X^2$ في المعلم (\vec{i}, \vec{j})

في \mathbb{R}^- لدينا معادلة (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})

هي $y = f(x)$

$$y = -(x + 1)^2 + 3$$

$$y - 3 = -(x + 1)^2$$

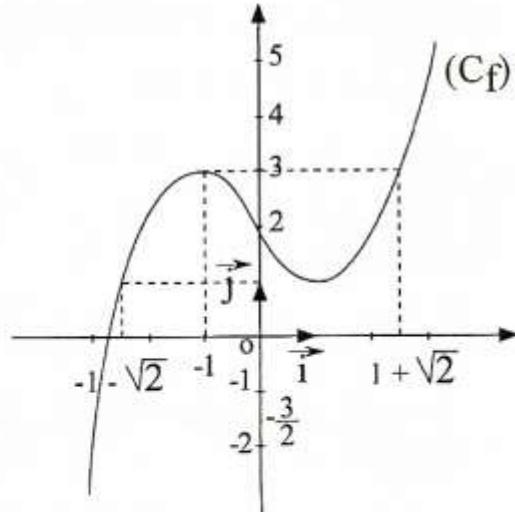
نضع $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 3 \end{cases}$

معادلة $Y = -X^2$ في المعلم

$(\Omega', \vec{i}, \vec{j})$ حيث $(-1, 3)$

إذن في \mathbb{R}^- جزء من شكل معادله

$(\Omega', \vec{i}, \vec{j})$ في المعلم (\vec{i}, \vec{j})



$$m \in \mathbb{R} \quad \text{حيث } x - m |x| + m = 0$$

الجواب :

$x - 1 \neq 0$ يعني $x \in D_f - 1$

$x \neq 1$ يعني

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ إذن

2 - ليكن x و y من D_f بحيث

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\frac{x}{x - 1} - \frac{y}{y - 1}}{x - y}$$

$$= \frac{x(y - 1) - y(x - 1)}{(x - y)(x - 1)(y - 1)}$$

$$= \frac{xy - x - yx + y}{(x - y)(x - 1)(y - 1)}$$

$$= \frac{-(x - y)}{(x - y)(x - 1)(y - 1)}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-1}{(x - 1)(y - 1)} \quad \text{إذن}$$

3 - في المجال $[1, +\infty[$

إذن $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$ لدينا

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$$

$$(x - 1)(y - 1) > 0 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{-1}{(x - 1)(y - 1)} \leqslant 0 \quad \text{إذن}$$

وبالتالي f تناقصية على المجال $[1, +\infty[$

وبنفس الطريقة f تناقصية على $]-\infty, 1]$

جدول تغيرات f :

$$x + 1 = -\sqrt{2} \quad \text{يعني} \quad x + 1 = \sqrt{2}$$

$$x = -1 - \sqrt{2} \quad \text{يعني} \quad x = -1 + \sqrt{2}$$

إذن

بالرجوع إلى البداية فإن :

$$-1 - \sqrt{2} \leqslant x \leqslant -1 + \sqrt{2} \quad 1 \leqslant f(x) \leqslant 3$$

إذن : $S = [-(1 + \sqrt{2}) ; (1 + \sqrt{2})]$

تمرين 11:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{x}{x - 1}$$

(C_f) المنسنى الممثل للدالة f في معلم متوازى
ومنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1 - حدد مجموعة تعريف f .

2 - حدد معدل تغيرات f .

3 - اعط جدول تغيرات f .

4 - بين أن $f(x) = 1 + \frac{1}{x - 1}$ لكل $x \in D_f$

5 - بين أن (C_f) هدلول حدد مركزه
ومقارباه

6 - أنشئ المنسنى (C_f)

7 - لتكن g الدالة المعرفة بـ :

$$g(x) = \frac{x}{|x| - 1}$$

أ - حدد مجموعة تعريف الدالة g .

ب - بين أن g دالة فردية.

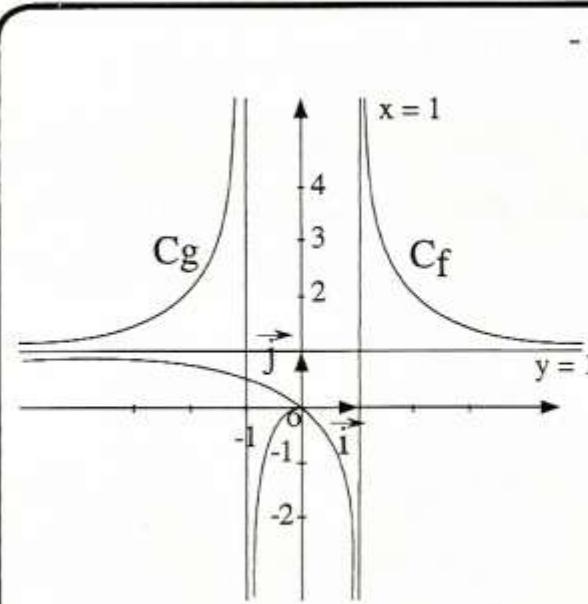
ج - بين أن $g(x) = f(x)$ لكل $x \in D_f \cap \mathbb{R}^+$

د - استنتج طريقة لانشاء (C_g) ثم أنشئ

(C_g) في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})

هـ - حدد مبيانا عدد حلول المعادلة :





- 6

X	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

x $\in D_f$ لـ 4

$$1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1}$$

$$= \frac{x}{x-1}$$

x $\in D_f$ إذن لكل $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

معادلة (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) هي $y = f(x)$

$$y = 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$y - 1 = \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

المعادلة (C_f) تصبح $Y = \frac{1}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(1, 1)$

ومنه (C_f) هذلول مركزه $\Omega(1, 1)$ ومقارباه

المستقيمان $y = 1$ و $x = 1$

: طريقة 2

هذلول مركزه $\Omega(\frac{1}{1}, \frac{1}{1})$ أي

$y = 1$ و $x = 1$ و مقارباه $\Omega(1, 1)$

$$g(x) = \frac{x}{|x|-1} \quad \text{لدينا} \quad 7$$

$$|x|-1 \neq 0 \quad \text{يعني} \quad x \in Dg$$

$$|x| \neq 1 \quad \text{يعني}$$

$$x \neq -1 \quad x \neq 1 \quad \text{يعني}$$

$$Dg = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad \text{وبالتالي}$$

$$x \neq -1 \quad x \neq 1 \quad \text{يعني} \quad x \in Dg \quad \text{ـ بـ}$$

$$-x \neq 1 \quad \text{و} \quad -x \neq -1 \quad \text{يعني}$$

$$-x \in Dg \quad \text{يعني}$$

$$-x \in Dg \quad \text{لدينا} \quad x \in Dg$$

لدينا

$$g(-x) = \frac{-x}{|-x|-1}$$

$$= \frac{-x}{|x|-1}$$

$$g(-x) = -g(x)$$

ومنه g دالة فردية.

ـ جـ لـ ىـ كـن $x \geq 0$ بـ حـ يـ ثـ

$$g(x) = \frac{x}{|x|-1} = \frac{x}{x-1} = f(x)$$

$$\text{ـ دـ لـ ىـ دـ} \quad g(x) = f(x)$$

4 - اعط جدول تغيرات الدالة f

5 - نعتبر الدالة g المعرفة بـ :

$$g(x) = \frac{|x| + 3}{|x| + 1}$$

a - أدرس زوجية الدالة g

b - أنشئ الدالة g في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

c - اعط جدول تغيرات الدالة g .

الجواب :

$x + 1 \neq 0$ يعني $x \in D_f - \{ -1 \}$

$x \neq -1$ يعني

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ومنه

2 - لكل $x \in D_f$

$$-1 + \frac{4}{x+1} = \frac{-x - 1 + 4}{x+1}$$

$$= \frac{-x + 3}{x+1} = f(x)$$

وبالتالي $f(x) = -1 + \frac{4}{x+1}$ لكل $x \in D_f$

3 - معادلة (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})

$y = f(x)$ هي

$y = -1 + \frac{4}{x+1}$ يعني

$y + 1 = \frac{4}{x+1}$ يعني

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 1 \end{cases}$$

نضع

المعادلة تصبح $Y = \frac{4}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$
حيث $\Omega = (-1, -1)$

b - هدلول مركزه (C_f) هو

ومقارباه المستقيمان $x = -1$ و $y = -1$.

$$x \in [0, 1] \cup [1, +\infty[$$

إذن $(C_g) = (C_f)$ في $[0, 1] \cup [1, +\infty[$

وبما أن f فردية نعم الرسم يإنشاء المماثل بالنسبة للأصل المعلم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

هـ - $x - m |x| + m = 0$ يعني

$$x = m(|x| - 1)$$

$$(\text{يعني } |x| \neq 1) \quad \frac{x}{|x| - 1} = m$$

$$g(x) = m \quad (\text{يعني })$$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_g)

وال المستقيم $y = m$

الحالة 1 : $m = 0$ هناك وحيد هو $x = 0$

الحالة 2 : $m < 0$ هناك حلين مختلفين.

الحالة 3 : $0 < m \leq 1$ ليس هناك حل.

الحالة 4 : $m > 1$ هناك حلاً مختلطاً.

تمرين 12:

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{-x + 3}{x + 1}$$

(C) التمثيل المباني لـ f في معلم متعمد

ومنظم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2 - تحقق أن $x \in D_f$ لكل $f(x) = -1 + \frac{4}{x+1}$

3 - ليكن $P = (-1, -1)$ نقطة من (P) .

a - بين أن معادلة (C) في المعلم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ هي

$$Y = \frac{4}{X}$$

b - أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$



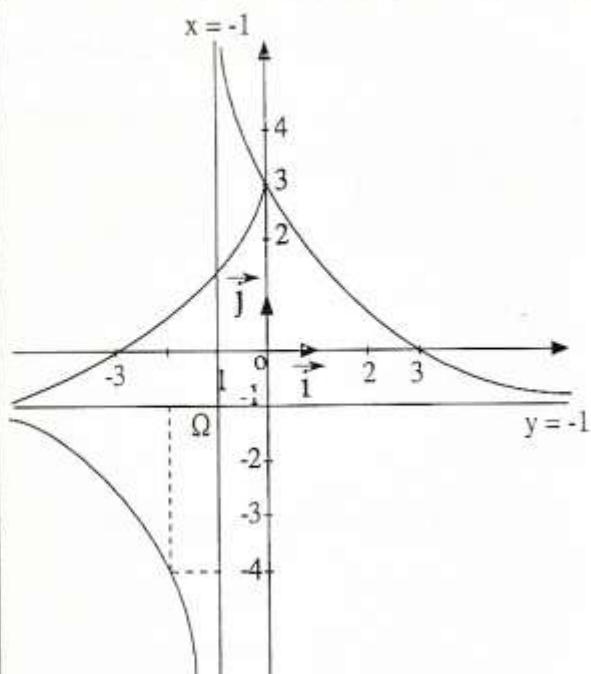
$$f(x) = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1} = \frac{-x + 3}{x + 1} = f(x)$$

إذن (C_f) و (Cg) منطبقان على هذا المجال.

c - من خلال منحني الدالة g فإن جدول

تغيرات g هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		3	



4 - جدول تغيرات f من خلال المنحني فإن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$			

لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{x - 2}{x}$$

و (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد

ومنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1 - حدد D_f وتحقق أن لكل $x \in D_f$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x}$$

2 - ليكن (Ω) في المعلم (\vec{i}, \vec{j})

يبين أن معادلة (C) في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) هي

$$Y = \frac{-2}{X}$$

3 - أنشئ (C) في المعلم (\vec{i}, \vec{j})

4 - اعط جدول تغيرات f .

5 - نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي :

$$g(x) = \frac{|x| - 2}{x}$$

a - أدرس زوجية الدالة g

b - أنشئ (Cg) في نفس المعلم (\vec{i}, \vec{j})

5 - لدينا $g(x) = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1}$

$|x| + 1 \neq 0$ يعني $x \in Dg$

يعني $-1 \neq |x|$ وهذا دائماً صحيح

إذن $Dg = \mathbb{R}$

لكل $-x \in Dg$ لدينا $x \in Dg$

$$g(-x) = \frac{-|-x| + 3}{|-x| + 1} = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1} = g(x)$$

إذن g دالة زوجية.

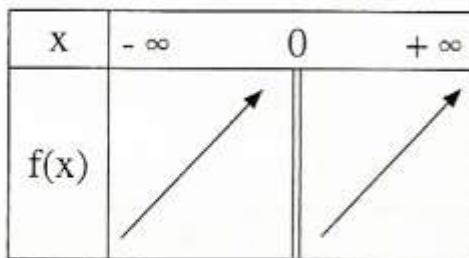
b - لدينا g دالة زوجية إذن (Cg) يكون

متمايلاً بالنسبة لمحور الأراتيب.

نشئ (Cg) أولاً على $[0, +\infty]$ في هذا المجال

4 - جدول تغيرات f

حسب منحني f فإن



$$g(x) = \frac{|x| - 2}{x} \quad \text{لدينا 5}$$

$x \neq 0$ يعني $x \in Dg$

$Dg = \mathbb{R} - \{0\}$ ومنه

$$g(x) = \frac{|-x| - 2}{-x} = \frac{|x| - 2}{-x} = \frac{|x| - 2}{x} = -g(x)$$

إذن g دالة فردية.

ب - لدينا g دالة فردية إذن (Cg) متماثل بالنسبة لأصل المعلم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$

في المجال $[0, +\infty]$ لدينا :

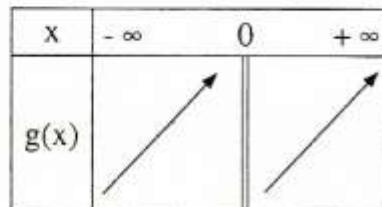
$$g(x) = \frac{|x| - 2}{x} = \frac{x - 2}{x}$$

$g(x) = f(x)$

إذن (f) و (g) منطبقان في المجال $[0, +\infty]$

ثم نتم الرسم بإنشاء المماثل بالنسبة لأصل المعلم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$

ج - جدول تغيرات g .



مستعملاً منحني الدالة f .

ج - اعط جدول تغيرات g .

الجواب :

$$f(x) = \frac{x - 2}{x} \quad \text{لدينا 1}$$

$x \neq 0$ يعني $x \in Df$

$Df = \mathbb{R} - \{0\}$ ومنه

$$1 - \frac{2}{x} = \frac{x - 2}{x} = f(x) \quad \text{لدينا كذلك}$$

$$x \in Df \quad \text{لكل } f(x) = 1 - \frac{2}{x} \quad \text{ومنه}$$

2 - معادلة (C_f) في المعلم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

$$y = 1 - \frac{2}{x} \quad \text{يعني}$$

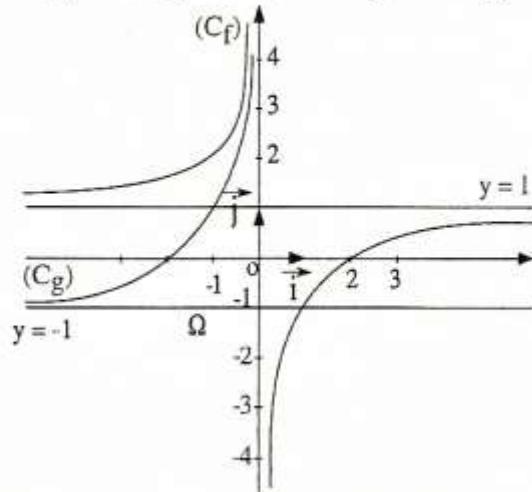
$$y - 1 = -\frac{2}{x} \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$\text{المعادلة تصبح } Y = -\frac{2}{X} \quad \text{في المعلم } (\vec{\Omega}, \vec{i}, \vec{j}) \quad \text{حيث } \Omega(0, -1).$$

$\Omega(0, -1)$ عبارة عن هذلول مركبة (C_f) - 3

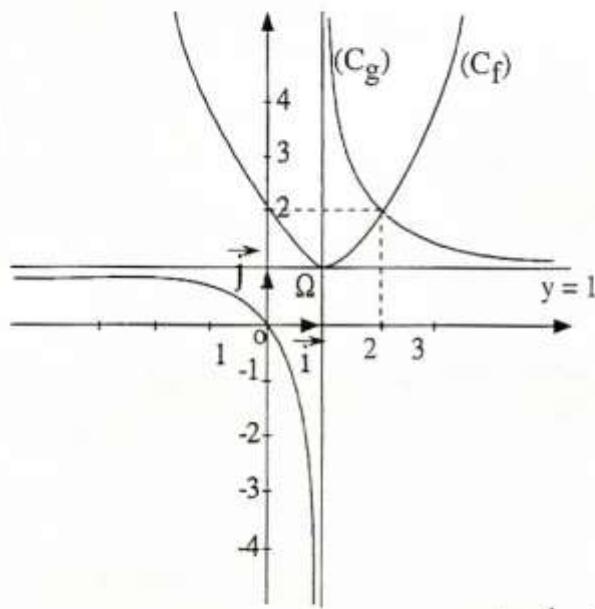
ومقارباه المستقيمان $y = 1$ و $x = 0$.



$y = \frac{x}{x-1}$	يعني
$y = \frac{x-1+1}{x-1}$	يعني
$y = 1 + \frac{1}{x-1}$	يعني
$y - 1 = \frac{1}{x-1}$	يعني
$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$	نضع

المعادلة تصبح $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ في المعلم $Y = \frac{1}{X}$

(C_f) شلجم رأسه Ω و موجه نحو الأعلى (C_g) هذلول مركزه Ω و مقارباه المستقيمان $y = 1$ و $x = 1$



- لدينا 3

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 - 2x + 2 + \frac{x}{1-x} \\ &= x^2 - 2x + 2 - \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \text{يعني} \quad h(x) \geq 0$$

تمرين 14:

لتكن الدالة f و g المعرفين بما يلي :

$$g(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x + 2$$

g و (Cg) هما المنحنيان المثلثان لـ f و g

المعلم المتعامد والمنظم (\vec{i}, \vec{j}) و $(O, 1)$

نقطة من (P)

1 - حدد معادلتي (Cf) و (Cg) في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) و $(O, 1)$

2 - أنشئ (Cf) و (Cg) في المعلم (\vec{i}, \vec{j})

3 - لتكن الدالة h المعرفة بما يلي :

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 + \frac{x}{1-x}$$

أدرس مبيانا إشارة الدالة $h(x)$

الجواب :

1 - معادلة (Cf) في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) هي :

$$y = f(x)$$

$$y = x^2 - 2x + 2 \quad \text{يعني}$$

$$y = x^2 - 2x + 1 + 1 \quad \text{يعني}$$

$$y - 1 = (x - 1)^2 \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

معادلة (Cf) تصبح $Y = X^2$ في المعلم (\vec{i}, \vec{j})

حيث $\Omega(1, 1)$

معادلة (Cg) في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) هي :

$$y = g(x)$$

- ب - أنشئ (Cg) في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})
- ج - حل مبيانا المتراجحة $\frac{g(x)}{f(x)} > 0$
- α هو حل المعادلة $g(x) = f(x)$ غير مطلوب تحديده.

الجواب:

1 - لدينا

$$Dg = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1} = f(x)$$

$$x \in Df \quad \text{لكل } f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$$

2 - أ - ليكن x و y من Df بحيث

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{x-2}{x-1} - \frac{y-2}{y-1} \\ &= \frac{(x-2)(y-1) - (x-1)(y-2)}{(x-1)(y-1)(x-y)} \\ &= \frac{xy - x - 2y + 2 - xy + 2x + y - 2}{(x-1)(y-1)(x-y)} \\ &= \frac{x - y}{(x-1)(y-1)(x-y)} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = \frac{1}{(x-1)(y-1)}$$

ب - في المجال $[0, +\infty]$ لدينا :

$$\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases}$$

$$(x-1)(y-1) > 0 \quad \text{و منه}$$

يعني $f(x) \geq g(x)$

يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C_f)

فوق (Cg) .

إذن :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$h(x)$	+	-	○	+

تمرين 15:

نعتبر الدالة المعرفة بـ :

$$g(x) = \frac{x-2}{x-1}$$

1 - تتحقق أن :

$$x \in Df \quad \text{لكل } f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$$

2 - أ - أحسب معدل تغيرات f .

ب - اعط جدول تغيرات f .

3 - أ - بين أن (C_f) هذلول محددا عناصره المميزة.

ب - أنشئ المحنى (C_f) في معلم متعمد ومنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

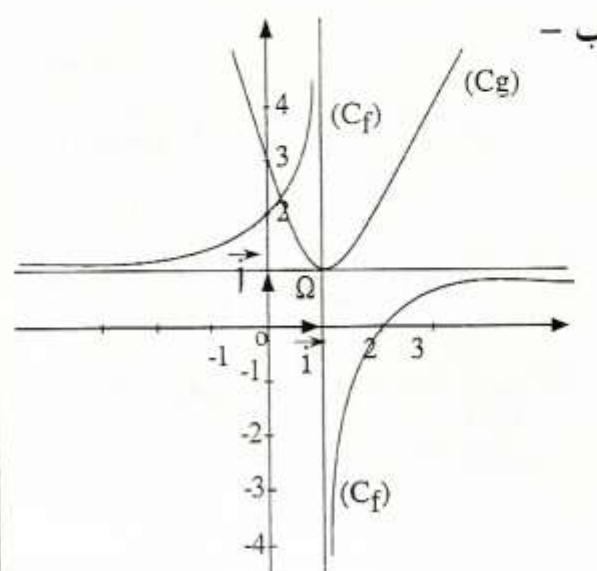
4 - حل مبيانا المتراجحة $f(x) > 0$

5 - نعتبر الدالة المعرفة بـ :

$$g(x) = x^2 - 2x + 3$$

أ - بين أن (Cg) عبارة عن شلجم حدد عناصره المميزة.

وبالتالي (C_f) هذلول مركزه Ω ومقارباه المستقيمان $y = 1$ و $x = 1$.



$f(x) > 0$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق محور الأفاسيل.

$S =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$
 (O, \vec{i}, \vec{j}) معادلة في المعلم

$y = f(x)$ هي

$y = x^2 - 2x + 3$ يعني

$y = x^2 - 2x + 1 + 2$ يعني

$y = (x - 1)^2 - 2$ يعني

$y - 2 = (x - 1)^2$ يعني

$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$ نضع

المعادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) .
حيث $\Omega' (1, 1)$

إذن $\frac{1}{(x - 1)(y - 1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $[1, +\infty[$ في المجال $]-\infty, 1]$ لدينا:

$$\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$$

إذن $(x - 1)(y - 1) > 0$

ومنه $\frac{1}{(x - 1)(y - 1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $]-\infty, 1]$ جدول تغيرات f :

X	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

أ - معادلة (C_f) في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) هي:

$$y = f(x)$$

$$y = 1 - \frac{1}{x - 1}$$
 يعني

$$y - 1 = -\frac{1}{x - 1}$$
 يعني

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$
 نضع

المعادلة تصبح $Y = -\frac{1}{X}$ في المعلم (\vec{i}, \vec{j}) .
حيث $\Omega (1, 1)$

3 - أثبتت أن $Y = \frac{1}{X}$ و $Y = X^2$ هما معادلتان ديكارتيةان لـ (C) و (C') على التوالي في المعلم

$$\vec{\Omega} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

4 - أنشئ (C) و (C')

5 - حل مبيانيا المترابطة :

$$g(x) - f(x) \leq 0$$

6 - نقاش تبعاً لقيم عدد حلول المعادلة :

$$(E) \quad x^2 - 2x + 3 - m = 0$$

7 - تعتبر الدالة h المعرفة بـ :

$$h(x) = x^2 + 2|x| + 3$$

أ - بين أن h دالة زوجية.

ب - بين أن لكل $x \leq 0$

ج - استنتاج تغيرات الدالة h

الجواب :

1 - لدينا :

$$g(2) = 3 \quad f(2) = 3 \quad f(0) = 3$$

2 - التقاطع مع محور الأفاسيل

$$\frac{2x - 1}{x - 1} = 0 \quad \text{يعني} \quad g(x) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{يعني}$$

إذن (C') يقطع محور الأفاسيل في $(\frac{1}{2}, 0)$

B (0, g(0)) يقطع محور الأراتيب في (0, 3)

أي (0, 1)

3 - معادلة (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) هي :

$$y = f(x)$$

إذن (Cg) شلجم رأسه Ω موجه نحو الأعلى

ومحور تماثله المستقيم $x = 1$

طريقة 2

شنجم رأسه (Cg) أي $\Omega(\frac{2}{2}, g(1))$

$\Omega(1, 1)$

$\frac{g(x)}{f(x)} - 1 > 0$ يعني $\frac{g(x)}{f(x)} > 1$

$\frac{g(x) - f(x)}{f(x)} > 0$ يعني

جدول الإشارة

x	$-\infty$	α	1	2	$+\infty$
$g(x) - f(x)$	+	○	-	+	+
$f(x)$	+	+	-	+	
$\frac{g(x) - f(x)}{f(x)}$	+	○	-	-	+

وبالتالي : $S =]-\infty, \alpha] \cup [2, +\infty[$

ćمرين 16:

لتكن f و g الدالتين المعرفتين بـ :

$$g(x) = \frac{2x - 1}{x - 1} \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x + 3$$

و (C') منحنياهما على التوالي في معلم

متعادل و منتظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1 - أحسب $g(2)$; $f(2)$; $f(0)$

2 - حدد زوج احداثي كل من نقط تقاطع

مع محوري المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) مع (C')



$g(x) \leq f(x)$ يعني $g(x) - f(x) \leq 0$ - 5
يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (Cg)
. (Cf) تحت

$$S =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\quad \text{ذن}$$

$$x^2 - 2x + 3 - m = 0 \quad - 6$$

$$x^2 - 2x + 3 = m \quad \text{يعني}$$

$$f(x) = m \quad \text{يعني}$$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (Cf)

مع المستقيم الذي معادلته $y = m$

إذا كان $m = 2$ هناك حل وحيد.

إذا كان $m > 2$ هناك حالان مختلفان.

إذا كان $m < 2$ ليس هناك حل.

: 7 - لدينا

$$h(x) = x^2 + 2|x| + 3 \quad \text{أ - لدينا}$$

$$D_h = \mathbb{R}$$

$-x \in D_h \quad x \in D_h$ لكل

$$h(-x) = (-x)^2 + 2|-x| + 3$$

$$= x^2 + 2|x| + 3$$

$$h(-x) = h(x)$$

إذن h دالة زوجية

ب - لكل $|x| = -x$ لدينا $x \leq 0$

$$h(x) = x^2 + 2|x| + 3$$

$$= x^2 - 2x + 3$$

إذن $x \leq 0$ لكل $h(x) = f(x)$

ج - جدول تغيرات h

$$y = x^2 - 2x + 3 \quad \text{يعني}$$

$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 \quad \text{يعني}$$

$$y - 2 = (x - 1)^2 \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

المعادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم (\vec{i}, \vec{j})

$$\vec{O}\Omega = \vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{أي } \Omega(1, 2)$$

- معادلة (C') في المعلم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = g(x)$$

$$y = \frac{2x - 1}{x - 1} \quad \text{يعني}$$

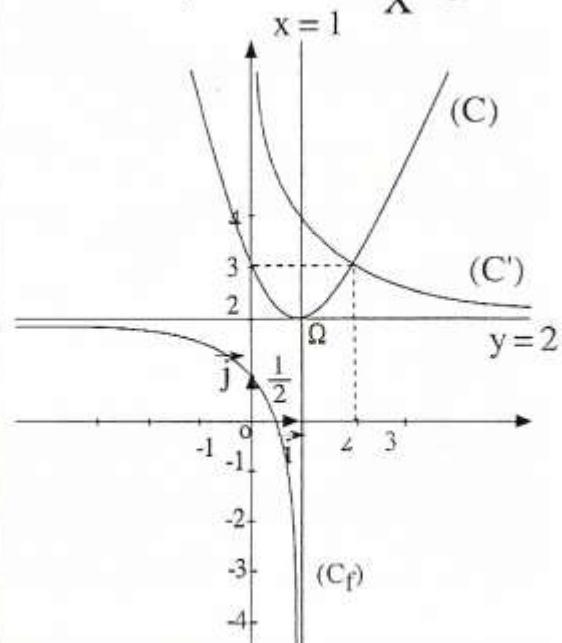
$$y = \frac{2(x - 1) + 1}{x - 1} \quad \text{يعني}$$

$$y = 2 + \frac{1}{x - 1} \quad \text{يعني}$$

$$y - 2 = \frac{1}{x - 1} \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

المعادلة تصبح $Y = \frac{1}{X}$ في المعلم (\vec{i}, \vec{j})



$$f(-x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{(-x)^2 - 4}$$

$$= \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 - 4}$$

$$f(-x) = f(x)$$

إذن f دالة زوجية.

2 - لدينا : لكل $|x| = -x \quad x \in Df \cap \mathbb{R}^+$

$$g(-x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-1}{x+2}$$

$$= \frac{x+2-3}{x+2}$$

$$g(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$$

إذن 3 - لتحديد طبيعة (C_f)

معادلة (C_g) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) هي :

$$y = g(x)$$

$$x \in Df \cap \mathbb{R}^+$$

$$y = 1 - \frac{3}{x+2}$$

$$y - 1 = -\frac{3}{x+2}$$

$$\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

معادلة (C_g) في $Df \cap \mathbb{R}^+$ تصبح

إذن $\Omega(-2, 1)$ جزء من هذلول مركزه

ومقارباه $y = 1$ و $x = -2$

لدينا $h = f$ في $[-\infty, 1]$ إذن h و f هما نفس

التغيرات على $[-\infty, 0]$

إذن h تناظرية على $[0, -\infty]$ وبما أنها زوجية

فإن h تزايدية على $[0, +\infty]$

تمرين 17:

لتكن الدالة f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 - 4}$$

1 - حدد Df مجموعة تعريف f ثم ادرس زوجية f

2 - نضع $\mathbb{R}^+ \cap Df$ لكل x من $g(x) = f(x)$

بين أن $g(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$

3 - أ - حدد طبيعة (C_f) وعناصره المميزة.

ب - أنشئ (C_g) ثم استنتج (C_g) في نفس

المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})

4 - حدد مبيانا عدد حلول المعادلة :

$$x^2(1-m) - 3|x| + 2(1+2m) = 0$$

وذلك حسب قيم x

الجواب :

$x^2 - 4 \neq 0$ يعني $x \in Df$ - 1

$x^2 \neq 4$ يعني

$x \neq -2$ و $x^2 \neq 2$ يعني

$Dg = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ومنه

$-x \in Df$ لدينا $x \in Df$ لكل

والمنظم المحنبيان (C_g) و (C_f) حيث :

$$f(x) = 4x - x^2 \quad g(x) = 2 + \frac{2}{x-1}$$

وحدد أحداً ثبي نقط تقاطعهما.

3 - استنتج التمثيل البياني للدالة h المعرفة بما

يلي :

نضع

$$\begin{cases} h(x) = g(x) & x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[\\ h(x) = f(x) & x \in]0, 2[\end{cases}$$

4 - حدد مبياناً عدد حلول المعادلة

$$m \in \mathbb{R} \quad \text{حيث}$$

الجواب :

D: $\mathbb{R} - \{2\}$ 1 - مجموعة تعرف المعادلة

$$4x - x^2 = 2 + \frac{2}{x-1} \quad \text{تكافى}$$

$$4x - x^2 = \frac{2x - 2 + 2}{x-1} \quad \text{تكافى}$$

$$x(4-x)(x-1) = 2x \quad \text{يعنى}$$

$$x(4-x)(x-1) - 2x = 0 \quad \text{يعنى}$$

$$x[(4-x)(x-1) - 2] = 0 \quad \text{يعنى}$$

$$x[(4-x)(x-1) - 2] = 0 \quad \text{يعنى}$$

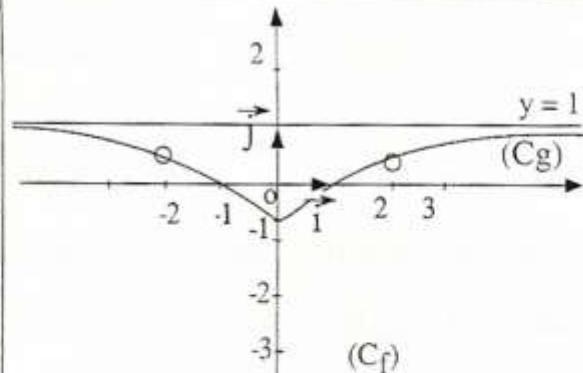
$$x = 0 \quad \text{أو} \quad (4-x)(x-1) - 2 = 0 \quad \text{يعنى}$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad 4x - 4 - x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{يعنى}$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad -x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \text{يعنى}$$

$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \text{بالنسبة للمعادلة}$$

$$\Delta = 25 - 4(-1) \times (-6) = 1 \quad \text{لدينا}$$



- 4

$$x^2(1-m) - 3|x| + 2(1+2m) = 0$$

$$x^2 - mx^2 - 3|x| + 2 + 4m = 0$$

$$x^2 - 3|x| + 2 = m(x^2 - 4) \quad \text{يعنى}$$

$$(|x| \neq 2) \quad \text{و} \quad \frac{x^2 - 3|x| + 2}{(x)^2 - 4} = m$$

$$f(x) = m \quad \text{يعنى}$$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_f)

وال المستقيمات

إذا كان $m = -\frac{1}{2}$ هناك حل وحيد.

إذا كان $m < -\frac{1}{2}$ ليس هناك حل.

إذا كان $m = \frac{1}{4}$ ليس هناك حل.

إذا كان $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$ هناك

حلين مختلفين

إذا كان $m \geq 1$ ليس هناك حل.

تمرين 18:

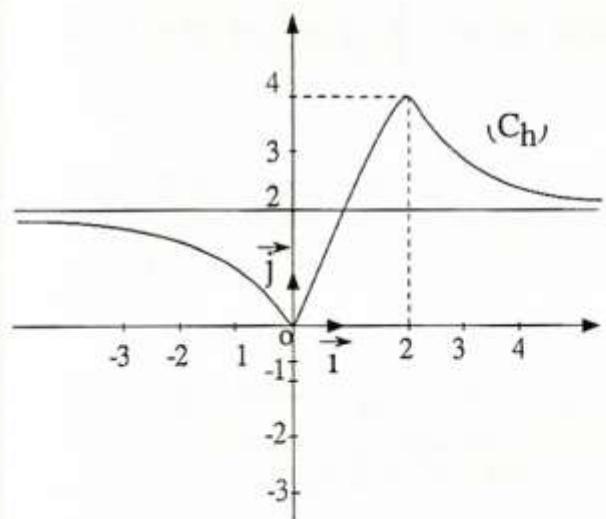
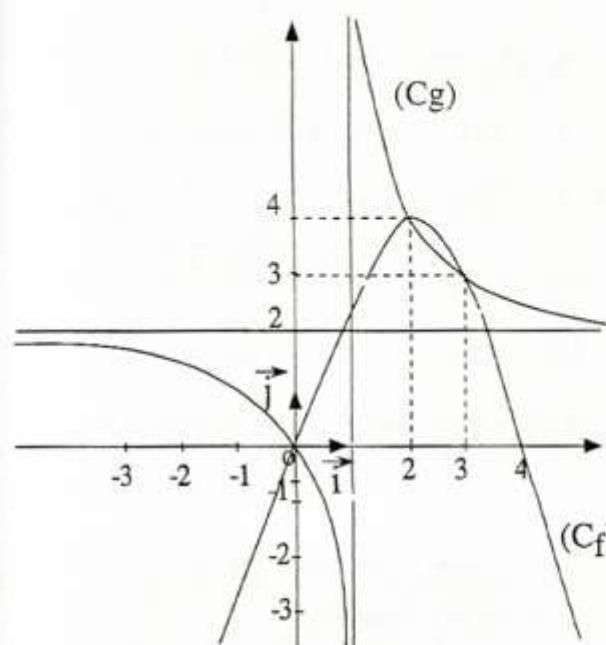
1 - حل في \mathbb{R} المعادلة :

$$4x - x^2 = 2 + \frac{1}{x-1}$$

2 - أنشئ في نفس المعلم (O, j, i) المتعامد



إذن :
 - إذا كان $m = 0$ أو $m = 4$ هناك $S = \emptyset$
 - إذا كان $m = 2$ حل وحيد.
 - إذا كان $m < 0$ أو $m > 4$ فإن $S = \{0, 2, 3\}$
 - إذا كان $0 < m < 2$ أو $2 < m < 4$ هناك حلاً مختلفان



$$x = \frac{-5 - 1}{-2} = 3 \quad \text{أو} \quad x = \frac{-5 + 1}{-2} = 2$$

$$S = \{0, 2, 3\}$$

إذن 2 - معادلة (Cg) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) هي :

$$y = f(x)$$

$$y = 2 + \frac{2}{x - 1}$$

$$y - 2 = -\frac{2}{x - 1}$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

يعني

يعني

نضع

المعادلة تصبح $Y = \frac{2}{X}$ في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})

حيث $\Omega(1, 2)$ إذن (Cf) هذلول مركزه

$$y = 2 \quad \text{و} \quad x = 1$$

معادلة (Cf) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) هي :

$$y = f(x)$$

$$y = 4x - x^2$$

$$y = -(x^2 - 4x)$$

$$y = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$$

$$y = -(x - 2)^2 + 4$$

$$y - 4 = -(x - 2)^2$$

يعني

يعني

يعني

يعني

يعني

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 4 \end{cases}$$

نضع

المعادلة تصبح $Y = -X^2$ في المعلم (O', \vec{i}', \vec{j}')

حيث $\Omega'(2, 4)$

4 - لدينا $h(x) = m$ يعني x أقصى نقطة تقاطع مع المستقيم الذي معادلته (Ch)

$$(\Delta) \quad y = m$$