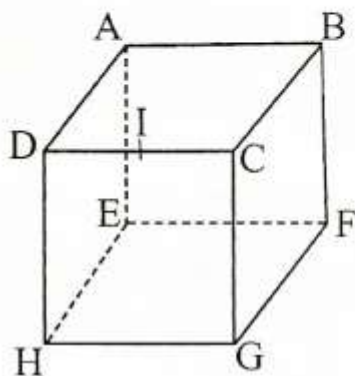


تمارين وحلولها

الجواب :



1 - لدينا ABCD مربع إذن $(AB) \parallel (DC)$

ومنه A و B و C و D مستوائية

إذن : $(DC) \subset (ABC)$

وبما أن $I \in [DC]$ فإن $I \in (ABC)$

2 - لدينا $(BC) \parallel (AD)$ لأن ABCD مربع

و $(EH) \parallel (AD)$ لأن ADHE مربع

إذن $(BC) \parallel (EH)$

ومنه النقط E و H و C و B مستوائية

تمرين 3 :

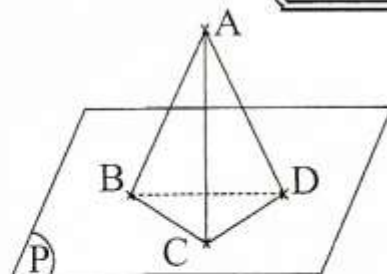
نعتبر متوازي المستطيلات القائم حيث قياسات أضلاعه هي على التوالي : 1cm ، 2cm ، 3cm

- (1) - ما هو قياس قطر متوازي المستطيلات ؟
- (2) - ما هو ضلع مكعب حيث قطر هذا المكعب يساوي قطر متوازي المستطيلات السابق.

تمرين 1 :

(P) مستوى في الفضاء (E) حيث B و C و D ثلاث نقط غير مستقيمة من (P) و $A \notin (P)$ أنشئ الشكل ثم حدد المستويات الموجودة في الشكل.

الجواب :



وبما أن B و C و D من المستوى (P) و $A \notin (P)$

فإن النقط A و B و C و D غير مستوائية

إذن A و B و C و D تحدد رباعي الواجه.

لدينا أربع مستويات وهي :

(BCD) و (ACD) و (ABD) و (ABC)

تمرين 2 :

ABCDEFGH مكعب و I منتصف القطعة [DC]

1 - هل النقطة I تنتمي إلى المستوى (ABC) ؟

علل جوابك

2 - بين أن النقط E و H و C و B مستوائية

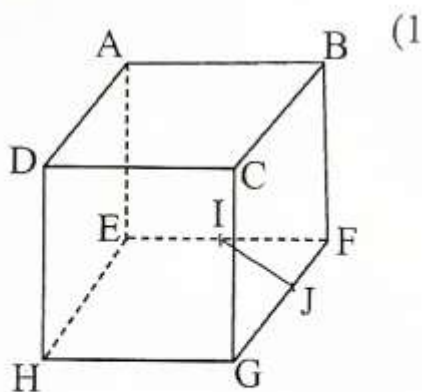
تمرين 4 :

نعتبر ABCDEFGH مكعبا و I منتصف القطعة [FG] و J منتصف القطعة [EF]

(1) - هل النقط I و J و F و D مستوائية ؟ (على جوابك).

(2) - بين أن النقط A و C و G و E مستوائية

الجواب :



لدينا $I \in (EF)$ و $J \in (FG)$

إذن النقطتان I و J تنتميان إلى المستوى (EFGH)

ولدينا $D \notin (EFGH)$

إذن النقط I و J و F و D غير مستوائية

(2) لدينا $(AE) \parallel (BF)$

و $(BF) \parallel (CG)$

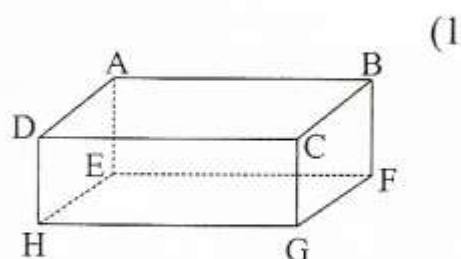
إذن ① $(AE) \parallel (CG)$

ولدينا $AE = BF$

و $CG = BF$

إذن ② $AE = CG$

الجواب :



لدينا AG قطر متوازي المستطيلات

لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 3^2 + 1^2$$

$$= 10$$

$$AC^2 = 10$$

لدينا كذلك حسب مبرهنة فيثاغورس :

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$

$$= 10 + 2^2$$

$$= 14$$

$$AG = \sqrt{14}$$

إذن :

(2) ليكن a ضلع المكعب

إذن قطر المكعب هو : $a\sqrt{3}$

لدينا : $a\sqrt{3} = \sqrt{14}$

إذن $a = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$

$$a = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

إذن ضلع المكعب هو : $\frac{\sqrt{42}}{3}$ cm

$$L \in (BCD) \text{ إذن } \begin{cases} L \in (BC) \\ (BC) \subset (BCD) \end{cases}$$

إذن (ILK) و (BCD) يتقاطعان وفق المستقيم

(Δ) يمر من L

كذلك لدينا

$$M \in (IJK) \text{ إذن } \begin{cases} M \in (JK) \\ (JK) \subset (IJK) \end{cases}$$

$$M \in (BCD) \text{ إذن } \begin{cases} M \in (CD) \\ (CD) \subset (BCD) \end{cases}$$

$$M \in (IJK) \cap (BCD) = (\Delta) \text{ ومنه}$$

كذلك لدينا

$$N \in (IJK) \text{ إذن } \begin{cases} N \in (IK) \\ (IK) \subset (IJK) \end{cases}$$

$$N \in (BCD) \text{ إذن } \begin{cases} N \in (BD) \\ (BD) \subset (BCD) \end{cases}$$

$$N \in (IJK) \cap (BCD) = (\Delta) \text{ ومنه}$$

ومنه L و M و N تنتمي إلى نفس المستقيم (Δ)

وبالتالي L ، M ، N نقط مستقيمة

تمرين 6 :

ليكن SABCD هو ما قاعدته ABCD شبه

منحرف حيث (CD) يوازي (AB)

من ① و ② نستنتج أن ACGE متوازي الاضلاع

ومنه (AC) // (EG)

إذن النقط A و C و G و E مستوائيات.

تمرين 5 :

ليكن ABCD رباعي أوجه

I و J و K نقط من [AB] و [AC] و [AD]

على التوالي بحيث

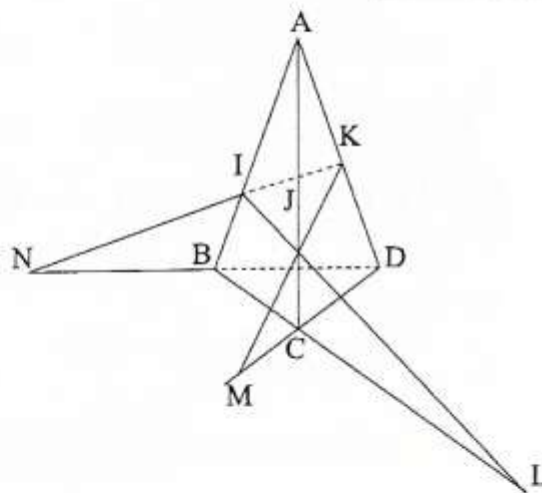
(IJ) يقطع (BC) في L

(JK) يقطع (CD) في M

(IK) يقطع (BD) في N

1 - بين أن النقط L و M و N مستقيمة

الجواب :



نعتبر المستويين (IJK) و (BCD)

لدينا (IJK) ≠ (BCD)

$$L \in (IJK) \text{ إذن } \begin{cases} L \in (IJ) \\ (IJ) \subset (IJK) \end{cases} \text{ و}$$



إذن من ① و ② و ③ نستنتج أن

$$(SAC) \cap (SBD) = (SI)$$

② لدينا $A \in (SAB)$ و $A \notin (SCD)$

$$(SAB) \neq (SAD) \quad \text{إذن}$$

$$S \in (SAB) \cap (SCD) \quad \text{لدينا}$$

$$(SCD) \cap (SAB) = (\Delta') \quad \text{لدينا}$$

$$(AB) \parallel (AC) \quad \text{و}$$

$$(CD) \subset (SCD) \quad \text{و} \quad (AB) \subset (SAB) \quad \text{و}$$

إذن : (Δ') هو المستقيم المار من S والموازي لـ

$$(CD) \quad \text{و} \quad (AB)$$

③ لدينا $A \in (SAD)$ و $A \notin (SBC)$

$$\text{إذن} \quad (SBC) \neq (SAD) \quad \text{①}$$

لدينا كذلك $S \in (SBC) \cap (SAD)$ ②

لتكن J نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC)

$$\text{إذن} \quad J \in (AD) \quad \text{و} \quad J \in (BC)$$

$$\text{ومنه} \quad J \in (SAD) \quad \text{و} \quad J \in (SBC)$$

$$\text{إذن} \quad J \in (SBC) \cap (SAD) \quad \text{③}$$

من ① و ② و ③ نستنتج أن

$$(SBC) \cap (SAD) = (SJ)$$

تمرين 7 :

ABCDEFGH مكعبا في الفضاء

1 - حدد وانشئ المستقيم (Δ) تقاطع المستويين

$$(ACH) \quad \text{و} \quad (BDF).$$

1 - حدد (Δ) تقاطع المستويين (SAC)

$$\text{و} \quad (SBD)$$

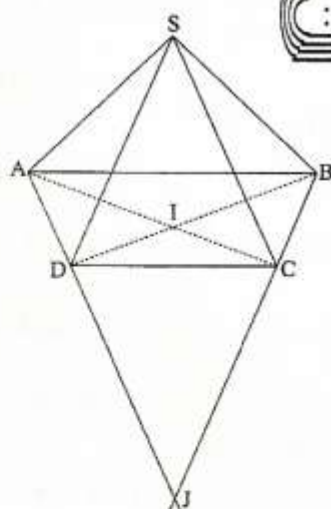
2 - حدد (Δ') تقاطع المستويين (SAB)

$$\text{و} \quad (SCD)$$

3 - حدد (Δ'') تقاطع المستويين (SAB)

$$\text{و} \quad (SCD)$$

الجواب :



①

لدينا $B \in (SBD)$ و $B \notin (SAC)$

$$\text{إذن} \quad (SAC) \neq (SBD) \quad \text{①}$$

لدينا $S \in (SBD)$ و $S \in (SAC)$

$$\text{إذن} \quad S \in (SAC) \cap (SBD) \quad \text{②}$$

لتكن I نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BD)

لدينا : $I \in (AC)$ و $I \in (AC) \subset (SAC)$

$$\text{فإن} \quad I \in (SAC)$$

لدينا $I \in (BD)$ و $(BD) \subset (SBD)$

$$\text{إذن} \quad I \in (SBD)$$

$$\text{ومنه} \quad I \in (SAC) \cap (SBD) \quad \text{③}$$

$$(BDF) \cap (ACH) = (HL)$$

② لدينا $I \in (IJE)$ و $I \notin (ADH)$

اذن $(IJE) \neq (ADH)$

لدينا $E \in (ADH)$ و $E \in (IJE)$

لأن : $(DH) \parallel (AE)$

إذن : $E \in (ADH) \cap (IJE)$

لدينا $\begin{cases} AB = HG \\ (AB) \parallel (HG) \end{cases}$ إذن

ABGH متوازي الأضلاع

ومنه $(AH) \parallel (BG)$

نعتبر المثلث EBG

لدينا I منتصف [EG]

J منتصف [AB]

إذن $(IJ) \parallel (BG)$

وبالتالي $(IJ) \parallel (AH)$

لدينا $\begin{cases} (IJ) \parallel (AH) \\ (IJ) \subset (IJE) \\ (AH) \subset (ADH) \\ (ADH) \cap (IJE) = (\Delta') \end{cases}$

إذن (Δ') هو المستقيم المار من E والمتوازي لـ (AH) و (IJ) .

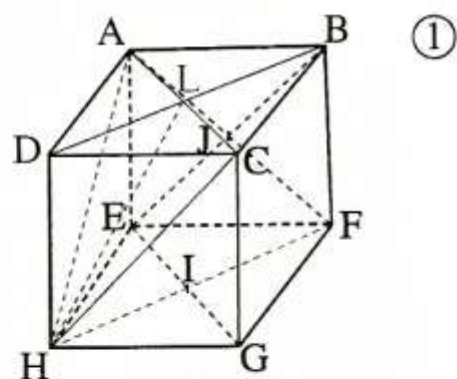
تمرين 8 :

ABCD رباعي الاوجه . E و F منتصفا القطعتين [AB] و [DC] على التوالي و G مركز

2 - ليكن I و J مركزا المربعين EFGH و ABFE على التوالي

حدد المستقيم (Δ') تقاطع المستويين (IJE) و (ADH) .

الجواب :



لدينا $A \in (ACH)$ و $A \notin (BDF)$

اذن $(ACH) \neq (BDF)$ ①

لدينا $H \in (ACH)$

بما أن $\begin{cases} DH = BF \\ (DH) \parallel (BF) \end{cases}$ فإن

الرباعي BDHF متوازي الاضلاع

ومنه B و D و H و F مستوائية

إذن $H \in (BDF)$

ومنه ② $H \in (BDF) \cap (ACH)$

لتكن L نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BD)

إذن $L \in (BDF)$ و $L \in (ACH)$

ومنه ③ $L \in (BDF) \cap (ACH)$

إذن من ① و ② و ③ نستنتج أن

بما أن $(EG) \parallel (BF)$ فإن

حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{EA}{BA} = \frac{AG}{AF}$$

أي أن $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ وهذا تناقض

إذن الافتراض خاطئ

ومنه (EG) و (BF) متقاطعان لأنهما

مستوائيان .

ج- لدينا $(BF) \subset (BCD)$

و $H \in (BF)$

إذن $H \in (BCD)$

ولدينا $H \in (EG)$

إذن $H \in (EG) \cap (BCD)$

ولدينا $E \in (EG)$ و $E \notin (BCD)$

إذن تقاطع المستقيم (EG) والمستوى (BCD) هو النقطة H .

إذن : $(EG) \cap (BCD) = \{H\}$

2 - تحديد تقاطع المستويين (ABC) و (DEG)

لدينا $A \in (ABC)$ و $A \notin (DEG)$

إذن $(DEG) \neq (ABC)$ ①

لدينا $E \in (AB)$ و $E \in (DEG)$

إذن $E \in (ABC)$

إذن $E \in (ABC) \cap (DEG)$ ②

لتكن L منتصف القطعة $[AC]$

ثقل المثلث ADC .

1 - أ - بين أن : (EG) و (BF) مستوائيان

ب- بين أن : (EG) و (BF) متقاطعان

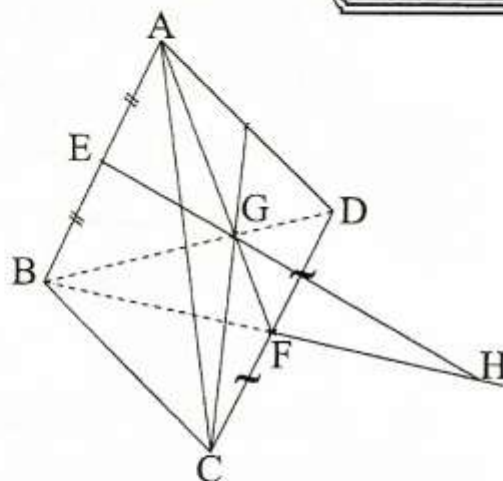
في نقطة H .

ج- استنتج تقاطع (EG) والمستوى

(BCD) .

2 - حدد تقاطع المستويين (ABC) و (DEG)

الجواب :



1 - أ - نعتبر المستوى (ABF)

لدينا $E \in (AB)$ إذن $E \in (ABF)$

لدينا $G \in (AD)$ إذن $G \in (ABF)$

ومنه $(EG) \subset (ABF)$

ولدينا $(BF) \subset (ABF)$

إذن (EG) و (BF) مستوائيان

ب - نفترض أن : $(EG) \parallel (BF)$

لدينا $\frac{EA}{BA} = \frac{1}{2}$

ولدينا $\frac{AG}{AF} = \frac{2}{3}$

1 - نعتبر المثلث SAB

لدينا I منتصف [AS]

J منتصف [BS]

إذن $(IJ) \parallel (AB)$

لدينا ABCD مستطيل إذن

$(AB) \parallel (DC)$

ومنه $(IJ) \parallel (DC)$

وبما أن $(DC) \subset (SDC)$

فإن $(IJ) \parallel (SDC)$

2 - نعتبر المثلث SAD

لدينا I منتصف [AS]

K منتصف [DS]

إذن $(IK) \parallel (AD)$

لدينا ABCD مستطيل ومنه

$(AD) \parallel (BC)$

وبالتالي $(BC) \parallel (IK)$

وبما أن $(BC) \subset (SBC)$

فإن $(IK) \parallel (SBC)$

لدينا (AB) و (AD) متقاطعان وضمن

المستوى (ABC)

ولدينا $(AB) \parallel (IJ)$ و $(AD) \parallel (IK)$

و (IJ) و (IK) متقاطعان وضمن المستوى

(IJK).

إذن $(IJK) \parallel (ABC)$

إذن $L \in (ABC)$

لأن $L \in (AC)$

لدينا (DL) متوسط في المثلث ACD

إذن G مركز ثقل المثلث ADC تنتمي إلى (DL).

ومنه $L \in (DL)$

وبالتالي $L \in (EDG)$

إذن $L \in (ABC) \cap (EDG)$ ③

إذن من ① و ② و ③ نستنتج أن

$(ABC) \cap (EDG) = (EL)$

تمرين 9 :

نعتبر SABCD هرم ما قاعدته المستطيل ABCD

I و J و K منتصفات القطع [SA] و [SB] و [SD]

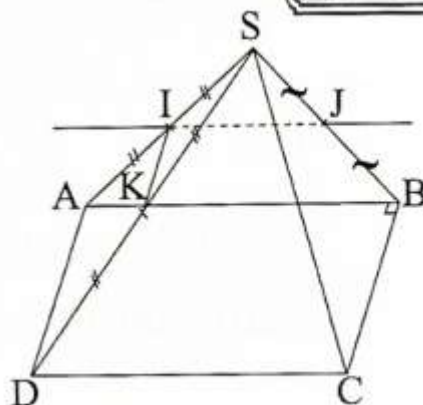
على التوالي .

1 - بين أن : (IJ) يوازي (SDC)

2 - بين أن : (IK) يوازي (SBC)

3 - بين أن : $(ABC) \parallel (IJK)$

الجواب :



تمرين 10 :

ليكن ABCDEFGH متوازي المستطيلات

1 - بين ان B و C و H و E نقط مستوائية.

2 - بين ان : $(BE) \parallel (HC)$

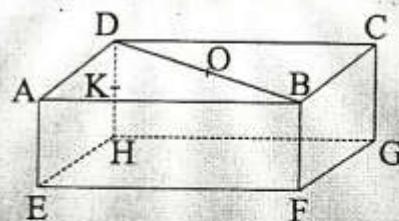
3 - لتكن O منتصف [BD] و K منتصف [DH]

بين ان : $(OK) \parallel (BCH)$

4 - علما أن $AB = 4$ و $AD = 3$ و $AE = 2$

احسب حجم متوازي المستطيلات

ABCEFGH.



الجواب :

1 - لدينا $(BC) \parallel (FG)$ لأن BCGF

متوازي أضلاع.

كذلك $(EH) \parallel (FG)$ لأن EFGH

متوازي أضلاع.

ومنه $(EH) \parallel (BC)$

وبالتالي (EH) و (HC) مستقيمان مستوائيان

إذن B و C و H و E نقط مستوائية.

2 - لدينا $(EH) \parallel (BC)$ و $EH = BC$

إذن BCHE متوازي أضلاع.

ومنه $(HC) \parallel (BE)$

3 - في المثلث DBH لدينا :

O منتصف [BD]

K منتصف [DH]

إذن $(OK) \parallel (BH)$

ولدينا $(BH) \subset (BCH)$

وبالتالي $(OK) \parallel (BCH)$

4 - حجم متوازي المستطيلات هو :

$$V = AB \cdot AD \cdot AE$$

$$= 2 \times 3 \times 4 = 24$$

تمرين 11 :

ليكن في الفضاء ABCD و ABEF متوازي

أضلاع لا يوجدان ضمن نفس المستوى.

1 - بين ان $(ADF) \parallel (BCE)$

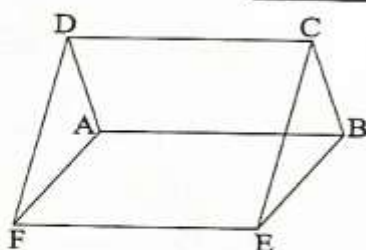
2 - أ - بين ان النقط E و F و C و D مستوائية

ب - بين أن (EC) يوازي (DF)

ج - استنتج طبيعة الرباعي CDEF

3 - حدد تقاطع المستويين (ACE) و (ADF)

الجواب :



1 - ABCD متوازي الاضلاع

إذن $(AD) \parallel (BC)$

و $C \notin (ADF)$	لدينا ABEF متوازي الاضلاع
اذن $(ACE) \neq (ADF)$	اذن $(AF) \parallel (BE)$
لدينا $A \in (ACE) \cap (ADF)$	لدينا (AD) و (AF) متقاطعان وضمن المستوى (ADF).
لنضع : $(ACE) \cap (ADF) = (\Delta)$	لدينا كذلك (BC) و (BE) متقاطعان وضمن المستوى (BCE)
ولدينا : $(FD) \subset (ADF)$	اذن $(ADF) \parallel (BCE)$
$(CE) \subset (ACE)$	2 - أ -
و $(FD) \parallel (CE)$	لدينا ABCD متوازي الاضلاع
اذن (Δ) هو المستقيم المار من A والموازي لـ (CE) و (FD)	اذن $(DC) \parallel (AB)$
اذن تقاطع المستويين (ACE) و (ADF)	لدينا ABEF متوازي الاضلاع
هو المستقيم المار من A والموازي لـ (CE) و (FD) .	اذن $(EF) \parallel (AB)$
	ومنه $(EF) \parallel (DC)$
	اذن النقط E و F و C و D مستوائيه
	ب -
	لدينا $(ADF) \parallel (BCE)$
	و $(EFDC) \cap (ADF) = (DF)$
	$(EFDC) \cap (BCE) = (EC)$
	ومنه : $(EC) \parallel (DF)$
	حسب الخاصية " إذا توازي مستويان فإن كل مستوى ثالث يقطع أحدهما فهو يقطع الآخر وفق مستقيمين متوازيين "
	ج - لدينا $\left\{ \begin{array}{l} (DC) \parallel (EF) \\ (EC) \parallel (DF) \end{array} \right\}$ اذن الرباعي CDEF متوازي الاضلاع
	3 - لدينا $C \in (ACE)$

تمرين 12 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا والنقط M و I

و N منتصفات القطع [AE] و [BF] و [DH]

1 - بين أن المستقيم (BA) يقطع المستقيم

(EF) في نقطة K وان المستقيم (CN) يقطع

المستقيم (GH) في نقطة L.

2 - بين ان : (BC) يوازي (KL)

3 - حدد تقاطع المستويين (ADE) و (IMH)

4 - بين أن المستقيم (IH) يوازي المستوى

(KLC)

لدينا $(AE) \parallel (DH)$ إذن $H \in (ADE)$

و $H \in (IMH)$

إذن $H \in (ADE) \cap (IMH)$ ③

إذن من ① و ② و ③ نستنتج أن

$$(ADE) \cap (IMH) = (MH)$$

4 - لدينا $(BI) \parallel (NH)$ و $BI = NH$

إذن الرباعي BNHI متوازي الأضلاع

ومنه $(IH) \parallel (NB)$

وبما أن $(NB) \subset (KLC)$

فإن $(IH) \parallel (KLC)$

تمرين 13 :

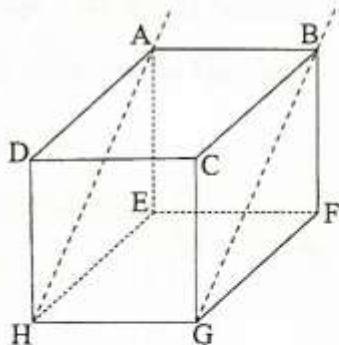
ليكن ABCDEFGH مكعبا

1 - بين أن $(HG) \perp (BF)$

2 - أ - بين أن $(AH) \parallel (GB)$

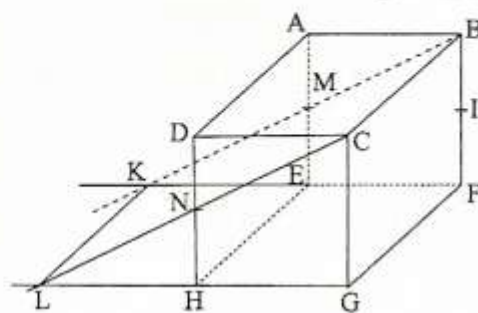
ب - استنتج أن : $(DE) \perp (GB)$

الجواب :



1 - لدينا : EFGH مربع

الجواب :



1 - نعتبر المستوى ABEF

لدينا (AB) و (EF) و (MB) مستوائية

لدينا $(AB) \parallel (EF)$

و (BM) يقطع (AB) في B

إذن (BM) يقطع (EF) في نقطة K .

نعتبر المستوى DCGH:

لدينا (DC) و (HG) و (CN) مستوائية

لدينا $(DC) \parallel (HG)$ إذن (CN) يقطع (DC) في C

(CN) يقطع (HG) في نقطة L

2 - النقط B و C و N و L و K و M مستوائية

لدينا $(ABCD) \parallel (EFGH)$

و $(ABCD) \cap (BCLK) = (BC)$

$(EFGH) \cap (BCLK) = (KL)$

إذن $(BC) \parallel (KL)$

3 - لدينا $A \in (ADE)$ و $A \notin (IMH)$

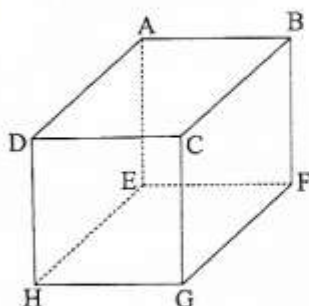
إذن $(IMH) \neq (ADE)$ ①

لدينا M منتصف [AE] إذن $M \in (ADE)$

ولدينا $M \in (AMH)$

إذن $M \in (ADE) \cap (IMH)$ ②

الجواب :



(1) - لدينا : $(HE) \perp (AE)$

لأن ADHE مربع

$(HE) \perp (EF)$

لأن HEFG مربع

لدينا كذلك : (AE) و (EF) متقاطعان في E

ضمن المستوى (ABF)

ومنه $(ABF) \perp (HE)$

(2) - أ - لدينا $(ABF) \perp (HE)$

و $(HE) \parallel (AD)$

إذن $(AD) \perp (ABF)$

وبما أن $(EF) \subset (ABF)$

فإن $(AD) \perp (EB)$

ب - لدينا $(AFG) = (AFGD)$

لأن $(FG) \parallel (AD)$

لدينا : ① $(EB) \perp (AD)$

لدينا : ② $(EB) \perp (AF)$

لأن $[AF]$ و $[EB]$ قطرا المربع ABFE

لدينا (AD) و (AF) متقاطعان في A وضمن

المستوى (AFG) ③

إذن $(HG) \parallel (EF)$

لدينا : مربع ABEF

إذن $(BF) \parallel (AE)$

و $(AE) \perp (EF)$ في النقطة E

إذن (HG) عمودي على (BF)

2 - أ -

لدينا $(HG) \parallel (EF)$ و $(EF) \parallel (AB)$

ومنه $(HG) \parallel (AB)$

لدينا كذلك : $HG = EF$

و $EF = AB$

إذن $HG = AB$

إذن $\left\{ \begin{array}{l} (HG) \parallel (AB) \\ HG = AB \end{array} \right.$ ومنه الرباعي

ABGH متوازي الاضلاع

ومنه $(AH) \parallel (GB)$

ب -

لدينا $(DE) \perp (AH)$ لأنهما قطر المربع ADHE

ولدينا $(AH) \parallel (GB)$

إذن $(DE) \perp (GB)$

تمرين 14 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا في الفضاء

(1) - بين أن $(ABF) \perp (HE)$

(2) - أ - بين أن $(EB) \perp (AD)$

ب - استنتج أن : $(AFG) \perp (EB)$

وبالتالي : $(IJ) \parallel (ABF)$

2 - لدينا $(AD) \perp (DC)$

$(AD) \perp (DH)$

و (DC) و (DH) متقاطعان ضمن المستوى

(HDC)

ومنه $(AD) \perp (HDC)$

ولدينا : $(IJ) \subset (HDC)$

إذن $(AD) \perp (IJ)$

تمرين 16 :

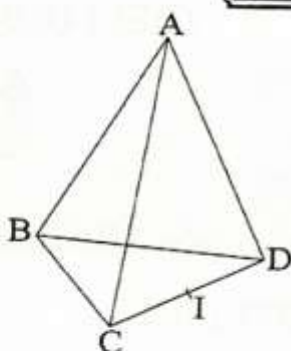
ليكن $ABCD$ رباعي أوجه بحيث :
 $AC = AD$ و $BC = BD$ ، I منتصف

$[CD]$

1 - بين أن : $(CD) \perp (ABI)$

2 - استنتج أن : $(AB) \perp (CD)$

الجواب :



1 - المثلث ACD متساوي الساقين لأن

$AC = AD$ رأسه A و I منتصف $[CD]$

إذن : $(AI) \perp (CD)$ ①

من ① و ② و ③ نستنتج أن

$(AFG) \perp (EB)$

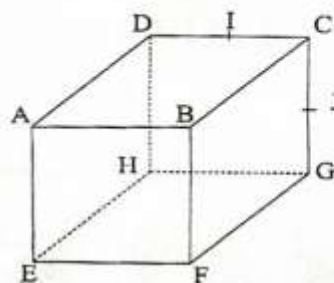
تمرين 15 :

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا.

I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[CG]$

1 - بين أن : $(IJ) \parallel (ABF)$

2 - أثبت أن : $(AD) \perp (IJ)$



الجواب :

1 - في المثلث DCG لدينا I منتصف $[DC]$

و لدينا J منتصف $[CG]$

إذن ① $(DG) \parallel (IJ)$

ولدينا $(BC) \parallel (AD)$ إذن $(AD) \parallel (FG)$
 $(BC) \parallel (FG)$

ولدينا $AD = FG$

إذن الرباعي $ADGF$ متوازي أضلاع

ومنه ② $(DG) \parallel (AF)$

من ① و ② نستنتج أن $(IJ) \parallel (AF)$

ولدينا $(AF) \subset (ABF)$

(1) - لدينا : $(AE) \perp (AB)$

لأن مربع ABFE مربع

$(AE) \perp (AD)$

لأن ADHE مربع

و (AB) و (AD) متقاطعان و ضمن المستوى

(ABD) إذن $(AE) \perp (ABD)$

وبما أن $(BD) \subset (ABD)$

فإن : $(AE) \perp (BD)$

(2) - لدينا : $(AE) \perp (BD)$

لأن ABCD مربع

إذن $(AC) \perp (BD)$

(AE) و (AC) متقاطعان و ضمن المستوى

(ACE)

إذن $(BD) \perp (AEC)$

(3) - ليكن H مركز المربع ABCD

إذن SH هو ارتفاع الهرم SABCD

إذن حجم الهرم SABCD هو :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABCD} \times SH$$

لدينا : $SH = AE$

ومنه $SH = 3 \text{ cm}$

لدينا $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 9 \text{ cm}^2$

ومنه $V = \frac{1}{3} \times 9 \times 3 \text{ cm}^3$

$$V = 9 \text{ cm}^3$$

كذلك BCD متساوي الساقين لأن

$BC = BD$ رأسه B و I منتصف [CD]

إذن : $(BI) \perp (CD)$ ②

ولدينا (BI) و (AI) متقاطعان ضمن المستوى

(ABI)

ومنه $(CD) \perp (ABI)$

(2) - لدينا : $(CD) \perp (ABI)$

و $(AB) \subset (ABI)$

إذن $(CD) \perp (AB)$

تمرين 17 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا في الفضاء

(1) - بين أن $(AE) \perp (BD)$

(2) - بين أن $(BD) \perp (AEC)$

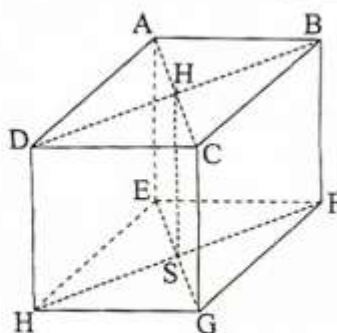
(3) - ليكن S مركز المربع EFGH

و $AB = 3 \text{ cm}$

احسب حجم الهرم SABCD

(4) - بين أن $(BDF) \perp (AEG)$

الجواب :



و $(CH) \subset (BCD)$

إذن ① $(CH) \perp (AB)$

لدينا H مركز تعامد المثلث BCD

إذن ② $(CH) \perp (BD)$

(AB) و (BD) متقاطعان و ضمن المستوى

③ (ABD)

من ① و ② و ③ نستنتج أن

$(CH) \perp (ABD)$

ب - لدينا $(CH) \perp (ABD)$

و $(AD) \subset (ABD)$

إذن $(AD) \perp (CH)$

المثلث BCD متساوي الاضلاع

إذن (IB) ارتفاع حيث I منتصف [CD]

إذن : $\mathcal{A}_{BCD} = \frac{CD \times BI}{2}$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة في المثلث

BCI القائم الزاوية في I لدينا :

$$IC^2 = BC^2 - CI^2$$

$$= 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= 9 - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{27}{4}$$

$$IC = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

إذن :

$$\mathcal{A}_{BCD} = \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{4}$$

ومنه

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

4 - لدينا $(AE) \parallel (CG)$

إذن النقط A و E و C و G مستوائية

ومنه $(AEC) = (AEG)$

لدينا $(BD) \subset (BDF)$

و $(BD) \perp (AEG)$

إذن $(BDF) \perp (AEG)$

تمرين 18 :

ABCD رباعي الاوجه حيث :

$(AB) \perp (BCD)$ و H مركز تعامد المثلث

BCD

1 أ - بين أن : $(CH) \perp (ABD)$

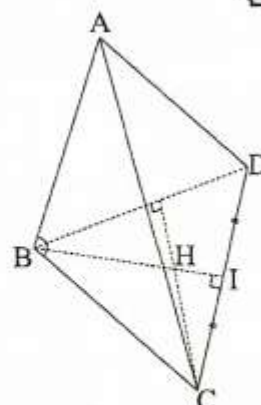
ب - استنتج أن : $(AD) \perp (CH)$

2 نفترض أن المثلث BCD متساوي

الاضلاع حيث $CB = 3 \text{ cm}$ و $AB = 4 \text{ cm}$

احسب حجم رباعي الاوجه ABCD.

الجواب :



1 أ - لدينا $(AB) \perp (BCD)$

ولدينا $AB = HG$ ومنه $ABGH$ متوازي أضلاع

وبالتالي ② $(BG) \parallel (AH)$

إذن لدينا : $(AH) \parallel (BG)$

$(BG) \perp (FC)$

ومنه $(FC) \perp (AH)$

(2) - لدينا : $(FC) \perp (BG)$

لدينا $(AB) \perp (BC)$

$(AB) \perp (BF)$

و (BC) و (BF) متقاطعان ضمن (BCF)

إذن $(AB) \perp (BCF)$

ولدينا $(FC) \subset (BCF)$

إذن $(AB) \perp (FC)$

إذن $(FC) \perp (AB)$

$(FC) \perp (BG)$

و (AB) و (BG) متقاطعان ضمن (ABG)

وبالتالي ③ $(FC) \perp (ABG)$

(3) - لدينا : $(FC) \perp (ABG)$

و $(FC) \subset (EFC)$

ومنه $(EFC) \perp (ABG)$

تمرين 20 :

ليكن $ABCD$ رباعي الاوجه بحيث :

$(AB) \perp (BCD)$

(AA') و (CC') ارتفاعان للمثلث ACD

نعلم أن حجم رباعي الاوجه $ABCD$ هو :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{مساحة } ABC \times AB$$

$[AB]$ ارتفاع لأن $(AB) \perp (BCD)$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{4} \times 4 \text{ cm}^3 \quad \text{إذن}$$

$$V = 3\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

تمرين 19 :

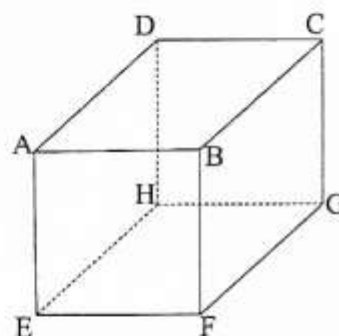
ليكن $ABCDEFGH$ مكعب

(1) - بين أن $(FC) \perp (AH)$

(2) - بين أن $(FC) \perp (ABG)$

(3) - استنتج أن : $(EFC) \perp (ABG)$

الجواب :



(1) - لدينا $BCGF$ مربع

إذن قطراه متعامدان

ومنه ① $(BG) \perp (FC)$

ولدينا $\begin{cases} (AB) \parallel (DC) \\ (DC) \parallel (HG) \end{cases}$ إذن $(AB) \parallel (AH)$

لدينا $(AB) \perp (BCD)$

و $(CC'') \subset (BCD)$ إذن $(AB) \perp (CC'')$

إذن $(CC'') \perp (BD)$

$(CC'') \perp (AB)$

و (BD) و (BA) متقاطعان ضمن (ABD)

وبالتالي $(CC'') \perp (ABD)$

بما ان $(AD) \subset (ABD)$

إذن $(CC'') \perp (AD)$

ولدينا $(CC') \perp (AD)$ لأن (CC') ارتفاع في المثلث ACD .

ولدينا (CC') و (CC'') متقاطعان ضمن $(CC'C'')$

إذن $(AD) \perp (CC'C'')$

تمرين 21:

ABC مثلث ضمن المستوى (P) و H مركز تعامده و O نقطة من المستقيم العمودي على

(P) في H حيث $H \neq O$

(1) أ - بين أن : $(AB) \perp (CHO)$

ب - استنتج أن : $(OC) \perp (AB)$

(2) بين أن : $(OA) \perp (BC)$

(3) المستقيم (Δ) المار من A والعمودي على

(OBC) يقطع هذا المستوى في النقطة K .

بين أن : $(OK) \perp (BC)$

و (CC'') ارتفاع في المثلث BCD .

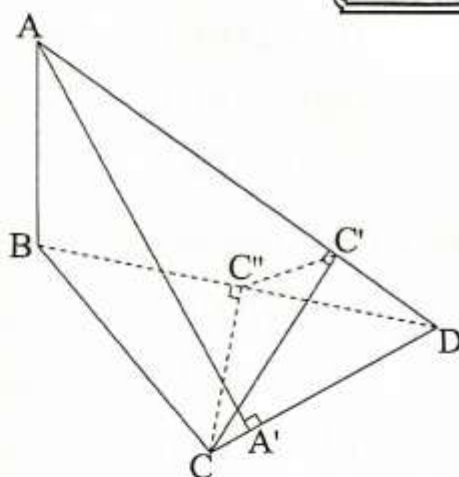
1 - انشئ الشكل.

2 - بين أن (BA') ارتفاع في المثلث BCD

3 - بين أن : $(AD) \perp (CC'C'')$

الجواب:

1 -



2 - لدينا $(AB) \perp (BCD)$ إذن $(AB) \perp (CD)$ و $(CD) \perp (BCD)$

①

(AA') ارتفاع في المثلث ACD

إذن : $(AA') \perp (CD)$ ②

ولدينا (AB) و (AA') متقاطعان ضمن $(AA'B)$.

إذن من ① و ② نستنتج أن

$(CD) \perp (AA'B)$

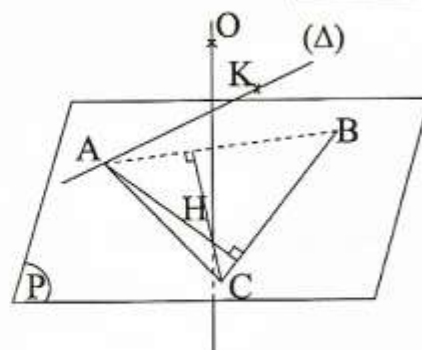
و لدينا $(A'B) \subset (AA'B)$

إذن $(CD) \perp (A'B)$

وبالتالي : (BA') ارتفاع في المثلث BCD .

3 - لدينا $(CC'') \perp (BD)$

الجواب :



1 أ - لدينا H مركز تعامد المثلث ABC

إذن ① $(CH) \perp (AB)$

لدينا $(P) \perp (OH)$

و $(AB) \subset (P)$

إذن ② $(OH) \perp (AB)$

لدينا (CH) و (OH) متقاطعان في H وضمن

المستوى ③ (CHO)

من ① و ② و ③ نستنتج أن

$(AB) \perp (CHO)$

ب - لدينا $(AB) \perp (CHO)$

و $(OC) \subset (CHO)$

إذن $(AB) \perp (OC)$

2 لدينا $\begin{cases} (BC) \subset (P) \\ (P) \perp (OH) \end{cases}$

إذن $(BC) \perp (OH)$

لدينا $(AH) \perp (BC)$ لأن H مركز تعامد

المثلث ABC

و (AH) و (OH) متقاطعان وضمن المستوى

(AOH)

ومنه $(AOH) \perp (BC)$

وبما أن $(OA) \subset (AOH)$

فإن $(OA) \perp (BC)$

3 لدينا حسب 2 : $(OA) \perp (BC)$

لدينا $(AK) \perp (OBC)$

و $(BC) \subset (OBC)$

إذن $(AK) \perp (BC)$

لدينا (AK) و (OA) متقاطعان في A وضمن المستوى (OAK) .

إذن $(BC) \perp (OAK)$

وبما أن $(OK) \subset (OAK)$

فإن $(BC) \perp (OK)$

تمرين 22 :

نعتبر ABCD رباعي أوجه حيث :

$(AC) \perp (AD)$ و $(AB) \perp (AC)$

و $(AD) \perp (AB)$ و M نقطة من $[DH]$

بحيث $M \neq C$ و $M \neq B$.

المستقيم المار من M والموازي لـ (BD) يقطع

(DC) في N والمستقيم المار من M والموازي

لـ (AC) يقطع (AB) في Q.

1 - ارسم الشكل

2 - بين ان : $(AC) \parallel (MNQ)$

و $(BD) \parallel (MNQ)$

ومنه Q, P, N, M نقط مستوائية

وبالتالي $P \in (MNQ)$

b - لدينا $(AC) \perp (AB)$

$(AC) \perp (AD)$

(AB) و (AD) متقاطعان ضمن المستوى

(ABD) .

ومنه $(AC) \perp (ABD)$

ولدينا $(NP) \parallel (AC)$

ومنه $(NP) \perp (ABD)$

ولدينا $(PQ) \subset (ABD)$

ومنه $(NP) \perp (PQ)$

لدينا $(MNQ) \cap (ABD) = (PQ)$

ولدينا $(MN) \subset (MNQ)$

$(BD) \subset (ABD)$

و $(BD) \parallel (MN)$ إذن حسب مبرهنة

السقف فإن $(MN) \parallel (PQ)$

إذن Q, P, N, M نقط مستوائية

و $(MN) \parallel (PQ)$ و $(MQ) \parallel (NP)$

و $(NP) \perp (PQ)$

إذن $MNPQ$ مستطيل

4 - حجم رباعي الأوجه هو :

$$V = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot \frac{AD \cdot AC}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{6}$$

$$V = 4 \quad \text{أي}$$

3 - الموازي لـ (AC) والمار من N يقطع

(AD) في P

a - بين أن : $P \in (MNQ)$

b - بين أن : $(NP) \perp (PQ)$ ثم أن الرباعي

$MNPQ$ مستطيل .

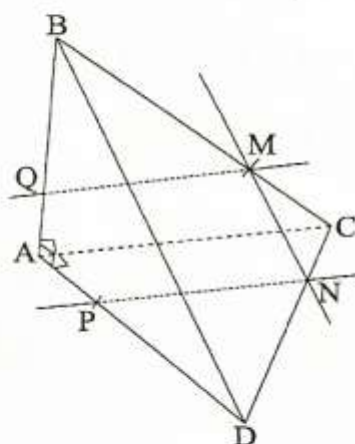
4 - علما أن : $AD = 4$ و $AC = 3$

و $AB = 2$ احسب حجم رباعي الأوجه

$ABCD$.

الجواب :

1 -



2 - لدينا $(AC) \parallel (QM)$

و $(QM) \subset (MNQ)$

إذن $(AC) \parallel (MNQ)$

لدينا $(BD) \parallel (MN)$

و $(MN) \subset (MNQ)$

إذن $(BD) \parallel (MNQ)$

3 - a - لدينا $(MQ) \parallel (AC)$

و $(NP) \parallel (AC)$

إذن $(MQ) \parallel (NP)$