أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:المعادلات والمتراجحات والنظمات

المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $-2x+22=0$ 2) $3(2x+5)=6x-1$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ 4) $9x^2-16=0$

5) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$

الأجوبة: 1) $-2x+22=0$ يعني $-2x+22-22=-22$

يعني $-2x=-22$

يعني $-2x\times\left(\frac{1}{-2}\right)=-22\times\left(\frac{1}{-2}\right)$

يعني $x=11$ ومنه: $S=\{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

2) $3(2x+5)=6x-1$ يعني $6x+15=6x-1$

يعني $6x-6x=-1-15$ يعني $0x=-16$ يعني $0=-16$

وهذا غيرممكن ومنه: $S=\varnothing$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ يعني $4x-8=6x-2x-8$

يعني $4x-4x+8-8=0$ يعني $0=0$

ومنه :كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي : $S=\mathbb{R}$

4)أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

طريقة 1: (التعميل) $9x^2-16=0$ يعني $(3x)^2-4^2=0$

يعني $(3x-4)(3x+4)=0$ يعني $3x+4=0$ أو $3x-4=0$

يعني $3x=-4$ أو $3x=4$ يعني $x=\frac{-4}{3}$ أو $x=\frac{4}{3}$

ومنه : $S=\left\{-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$

طريقة 2: $9x^2-16=0$ يعني $9x^2=16$ يعني $x^2=\frac{16}{9}$

يعني $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ أو, $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ يعني $x=\frac{4}{3}$ أو, $x=-\frac{4}{3}$

5) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة 1:نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة لها معنى يعني $x^2-9\neq0$

$x^2-9=0$ يعني $x^2-3^2=0$ يعني $(x-3)(x+3)=0$

يعني $x+3=0$ أو $x-3=0$ يعني $x=-3$ أو $x=3$

ومنه: $D_E=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمعادلة : $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$

يعني $(x-7)(x+3)=0$ يعني $x-7=0$ أو $x+3=0$

يعني $x=7\in D_E$ أو $x=-3\notin D_E$ ومنه : $S=\{7\}$

تمرين 2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$

2) $x^3-7x=0$

3) $(5x-7)^2-(5x-7)(2x+3)=0$

4) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16}=0$

5) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

الأجوبة: 1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$ (نوحد المقامات)

يعني $\frac{5x+5}{10}+\frac{40}{10}=\frac{2x-5}{10}+\frac{4x+40}{10}$

يعني $\frac{5x+5+40}{10}=\frac{2x-5+4x+40}{10}$

يعني $5x+5+40=2x-5+4x+40$ يعني $-x=-10$

يعني $x=10$ ومنه: $S=\{10\}$

2) $x^3-7x=0$ يعني $x\left(x^2-7\right)=0$ (التعميل)

يعني $x=0$ أو $x^2-7=0$ يعني $x=0$ أو $x^2=7$

يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{7}$ أو $x=-\sqrt{7}$ ومنه: $S=\left\{-\sqrt{7},0,\sqrt{7}\right\}$

3) $(5x-7)^2-(5x-7)(2x+3)=0$

يعني $(5x-7)\left[(5x-7)-(2x+3)\right]=0$

يعني $(5x-7)(3x-10)=0$ يعني $5x-7=0$ أو $3x-10=0$

يعني $x=\frac{7}{5}$ أو $x=\frac{10}{3}$ ومنه: $S=\left\{\frac{7}{5},\frac{10}{3}\right\}$

4) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16}=0$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة 1:نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة لها معنى يعني $x^2-16\neq0$

$x^2-16=0$ يعني $x^2-4^2=0$ يعني $(x-4)(x+4)=0$

يعني $x+4=0$ أو $x-4=0$ يعني $x=-4$ أو $x=4$

ومنه: $D_E=\mathbb{R}-\{-4,4\}$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمعادلة

$\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-16}=0$ يعني $(x-1)(x+2)=0$

يعني $x-1=0$ أو $x+2=0$

يعني $x=1\in D_E$ أو $x=-2\in D_E$ ومنه : $S=\{-2,1\}$

5) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$

هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة 1:نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة لها معنى يعني $x-2\neq0$ و $x+2\neq0$

يعني $x\neq2$ و $x\neq-2$

ومنه: $D_E=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمعادلة : $\frac{x+1}{x+2}=\frac{x-5}{x-2}$ يعني

$(x+1)(x-2)=(x-5)(x+2)$

يعني $x^2-2x+x-2=x^2-5x+2x-10$

يعني $-x+3x=-10+2$ يعني $2x=-8$ يعني $x=-4\in D_E$

ومنه : $S=\{-4\}$

تمرين 3: حدد إشارة الحدانيات التالية :

1) $2x+1$

2) $-x+2$

الأجوبة: 1) $2x+1=0$ يكافئ $x=-\frac{1}{2}$

و بما أن $a=2$ و $a\succ 0$ جدول إشارة $2x+1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

2) لنحدد إشارة $-x+2$

$-x+2=0$ يكافئ $x=2$

و بما أن: $a=-1$ و $a\prec 0$ فان جدول إشارة $-x+2$ هو كالتالي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-x+2$		$-$	0	$+$	

تمرين 4:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $3x+6\ge 0$

الجواب : $3x+6=0$ يكافئ $x=-2$

و بما أن: $3x+6\ge 0$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$3x+6$		$-$	0	$+$	

و منه فان : $S=[-2;+\infty[$

تمرين 5: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

1) $-2x+12>0$ 2) $5x-15\le 0$

3) $4x^2-9\ge 0$ 4) $(1-x)(2x+4)>0$

5) $\frac{5x-2}{1+3x}\ge 0$ 6) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\le 0$

الأجوبة: 1) $-2x+12>0$

$-2x+12=0$ يكافئ $x=6$

و بما أن: $a=-2$ و $a<0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$-2x+12$		$+$	0	$-$	

و منه فان : $S=]-\infty;6[$

2) $5x-15\le 0$

$5x-15=0$ يكافئ $x=3$

و بما أن: $a=5$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$5x-15=0$		$-$	0	$+$	

و منه فان : $S=]-\infty;3[$

3) $4x^2-9\ge 0$

$4x^2-9=0$ يعني $(2x)^2-3^2=0$ يعني $(2x-3)(2x+3)=0$

يعني $2x+3=0$ أو $2x-3=0$ يعني $x=\frac{-3}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$

الطريقة : في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax+b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-3)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

4) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ يعني $2x+4=0$ أو $1-x=0$ يعني

$x=-2$ أو $x=1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1-x)(2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

و منه فان : $S=]-2;1[$

5) $\frac{5x-2}{1+3x}\ge 0$ المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المتراجحة

المتراجحة لها معنى يعني $1+3x\neq 0$ يعني $x\neq -\frac{1}{3}$

ومنه: $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمتراجحة

$5x-2=0$ يعني $x=\frac{2}{5}$ $1+3x=0$ يعني $x=-\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$1+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{5x-2}{1+3x}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$

6) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\le 0$

المرحلة 1: نحدد أولا مجموعة تعريف المتراجحة

المتراجحة لها معنى يعني $2x-6\neq 0$ يعني $x\neq 3$ ومنه:

$D_I=\mathbb{R}-\{3\}$

المرحلة 2: الحل الفعلي للمتراجحة : $5x-10=0$ يعني $x=2$

$2x+1=0$ يعني $x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x-10$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[2;3[$

تمرين6:

1)هل العدد 1- حل للمعادلة $3x^2+5x+2=0$ ؟

2)هل العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$ ؟

الأجوبة : 1)العدد 1- حل للمعادلة $3x^2+5x+2=0$

لأن: $3(-1)^2+5(-1)+2=0$

2) العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}=0$

لأن: $\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}-\sqrt{3}=3+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}=0$

تمرين7: حدد الشكل القانوني للحدودية : $P(x)=2x^2+5x+2$

الجواب: لدينا $P(x)=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right)$ و

بالتالي $2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right)$

هو الشكل القانوني لثلاثية الحدود $2x^2+5x+2$.

تمرين8: حدد الشكل القانوني لثلاثية الحدود: $2x^2+6x+15$

الجواب : لدينا: $2x^2+6x+15=2\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{-21}{4}\right)$

$=2\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{21}{4}\right)$

تمرين9: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $3x^2+x+2=0$

2) $x^2-10x+25=0$

3) $x^2-3x+2=0$

الأجوبة : 1)المعادلة $3x^2+x+2=0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$

لأن $\Delta\prec0$ $(\Delta=1-4\times3\times2=-23)$ و بالتالي مجموعة حلولها ي $S=\phi$.

2)المعادلة $x^2-10x+25=0$ لها حل وحيد

لأن $\Delta=0$ $(\Delta=10^2-4\times25=0)$.

حل هذه المعادلة هو: $-\frac{b}{2a}=5$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\{5\}$.

3)نعتبر المعادلة $x^2-3x+2=0$ لدينا $\Delta=9-4\times2=1$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{3-1}{2}=1$ و $x_2=\frac{3+1}{2}=2$ و منه $S=\{1;2\}$.

تمرين10: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $6x^2-7x-5=0$ 2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

3) $3x^2+x+2=0$ 4) $4x^2-8x+3=0$

5) $x^2-4x+2=0$ 6) $x^2+5x+7=0$

7) $2x^2-4x+6=0$ 8) $x^2-4x-21=0$

9) $3x^2-6x+3=0$

الأجوبة: 1) $6x^2-7x-5=0$ $a=6$ و $b=-7$ و $c=-5$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times6\times(-5)=49+120=169=(13)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ يعني $x_1=\frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times6}=\frac{7+13}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

$x_2=\frac{7-13}{12}=\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{1}{2}\right\}$

2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ $a=2$ و $b=-2\sqrt{2}$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times1=8-8=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل **حلا وحيدا هو:**

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2+x+2=0$ $a=3$ و $b=1$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان** المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

4) $4x^2-8x+3=0$ $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times3\times(4)=84-8=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times4}$ **و** $x_2=\frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times4}$

$x_1=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ **و** $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\}$

5) $x^2-4x+2=0$ $a=1$ و $b=-4$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(1)=16-8=8>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times1}$ **و** $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times1}$ ومنه: $x_1=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}=2+\sqrt{2}$

$x_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2-\sqrt{2}$ ومنه: $S=\left\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right\}$

6) $x^2+5x+7=0$ $a=1$ و $b=5$ و $c=7$

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times7=25-28=-3<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

7) $2x^2-4x+6=0$ $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times6=16-48=-32<0$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

8) $x^2-4x-21=0$ $a=1$ و $b=-4$ و $c=-21$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-21)=16+84=100=(10)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times1}$ و $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+10}{2}=\frac{14}{2}=7$ و $x_2=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ ومنه: $S=\{-3,7\}$

9) $3x^2-6x+3=0$ $a=3$ و $b=-6$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times3=36-36=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو :

$x=\frac{-b}{2a}$ يعني $x=\frac{-(-6)}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$ ومنه: $S=\{1\}$

تمرين11: نعتبر المعادلة $(E)\ 20015x^2-2016x+1=0$

بين أن العدد 1 حل للمعادلة (E) ثم حدد الحل الثاني.

الأجوبة: نعوض x ب 1 في المعادلة (E) فنجد :

$2015\times1^2-2016\times1+1=2016-2016=0$ ومنه 1 حل ل (E)

حسب الخاصية السابقة لدينا : $x_1\times x_2=\frac{1}{2015}$ ولدينا $x_1=1$

اذن : $1\times x_2=\frac{1}{2015}$ يعني $x_2=\frac{1}{2015}$

تمرين12: نعتبر المعادلة : $(E):\ -2x^2+\sqrt{2}x+2=0$

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين α و β بدون حسابهما
2. استنتج قيم ما يلي: $\alpha+\beta$ و $\alpha\times\beta$ و $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ و $\alpha^2+\beta^2$ و $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ و $\alpha^3+\beta^3$

الأجوبة: 1) $-2x^2+\sqrt{2}x+2=0$ اذن: $a=-2$ و $b=\sqrt{2}$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(\sqrt{2})^2-4\times2\times(-2)=2+16=18>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين : α و β

2) حسب خاصية لدينا : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ و $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$

ومنه : $\alpha+\beta=-\frac{\sqrt{2}}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\alpha\times\beta=\frac{2}{-2}=-1$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

و لدينا : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ يعني $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

يعني $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2(-1)$ يعني $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

ولدينا : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$ اذن : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{-1}=-\frac{5}{2}$

ونعلم أن : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

يعني $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

يعني $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

اذن : $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

يعني $\alpha^3+\beta^3=\frac{\sqrt{2}^3}{2^3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{8}=\frac{14\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$

تمرين13 : عمل ثلاثية الحدود التالية ان أمكن :

$R(x)=6x^2-x-1$

الجواب : مميز الحدودية $R(x)$ هو $\Delta=1+24=25$.

إذن جذرا الحدودية: هما $x_1=\frac{1+5}{12}=\frac{1}{2}$ و $x_2=\frac{1-5}{12}=-\frac{1}{3}$

و بالتالي: $R(x)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

تمرين 14: عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $x^2-10x+25$ 2) x^2-3x+2 3) $3x^2+x+2$

أجوبة : 1) $x^2-10x+25$: $a=1$ و $b=-10$ و $c=25$

$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times(25)=100-100=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو:

$x_1=\frac{-(-10)}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$

ومنه التعميل : $x^2-10x+25=a(x-x_1)^2=1(x-5)^2$

2) x^2-3x+2 $a=1$ و $b=-3$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1=(1)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times1}$ و $x_1=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times1}$ يعني $x_1=2$ و $x_2=1$

ومنه التعميل : $x^2-3x-2=a(x-x_1)(x-x_2)=1(x-2)(x-1)$

3) $3x^2+x+2$ لدينا:

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

تمرين 15: عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $2x^2-4x+6$ 2) $4x^2-8x+3$ 3) $3x^2-6x+3$

أجوبة : 1) $2x^2-4x+6=0$: $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(6)=16-48=32<0$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

2) $4x^2-8x+3=0$ $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_1=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

ومنه التعميل : $4x^2-8x+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(4x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

3) $3x^2-6x+3$ بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1=\frac{-(-8)}{2\times4}=1$

ومنه التعميل : $3x^2-6x+3=a(x-x_1)^2=3(x-1)^2$

تمرين 16:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=2x^2-3x+1$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2x^2-3x+1\ge0$

أجوبة : 1) $P(x)=2x^2-3x+1$ $a=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ و $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) حل المتراجحة : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

تمرين 17:

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=-2x^2+4x-2$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2+4x-2>0$

أجوبة 1: $P(x)=-2x^2+4x-2$ $a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)=-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

2) حل المتراجحة : $S=\mathbb{R}$

تمرين 18:

1) أدرس إشارة الحدودية $P(x)=3x^2+6x+5$

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2+6x+5<0$

أجوبة 1: $P(x)=3x^2+6x+5$ $\quad a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$ ومنه:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		$+$	

2) **حل** المتراجحة : $S=\varnothing$

تمرين 19:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $2x^2-4x+6\geq0$ (2 $4x^2-8x+3\leq0$ (3 $x^2-3x-10<0$

أجوبة 1) $2x^2-4x+6\geq0$ $\quad a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		$+$	

ومنه: $S=\mathbb{R}$

2) $4x^2-8x+3\leq0$ $\quad a=4$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ **و** $x_1=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

3) $x^2-3x-10<0$ $\quad a=4$

$\Delta=b^2-4ac=49>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=5$ **و** $x_2=-2$ ومنه:

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-2,5[$

تمرين 20:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

1) تأكد أن الزوج $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة: $2x+3y=2$

2) اعط ثلاث أزواج حلول للمعادلة: $2x+3y=2$

3) حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $2x+3y=2$

أجوبة 1: $2\times0+3\times\frac{2}{3}=2$ اذن : $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ حل للمعادلة

2) $x=2$ اذن : $2\times2+3\times y=2$ يعني : $y=-\frac{2}{3}$ اذن : $\left(2,-\frac{2}{3}\right)\in S$

$x=3$ اذن : $2\times3+3\times y=2$ يعني : $y=-\frac{4}{3}$ اذن : $\left(3,-\frac{4}{3}\right)\in S$

$x=4$ اذن : $2\times4+3\times y=2$ يعني : $y=-2$ اذن : $(4,-2)\in S$

3) $2x+3y=2$ يعني $3y=-2x+2$ يعني $y=\frac{-2x+2}{3}$

يعني $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{-2}{3}x+\frac{2}{3}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

تمرين 21:

حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات التالية :

1) $2x-8y+10=0$ (2 $-3x+12y-2=0$

3) $7x-14y+1=0$

أجوبة 1) $2x-8y+10=0$ يعني $2y=8x-10$ يعني $y=\frac{8x-10}{2}$

يعني $y=4x-5$ اذن : $S=\{(x;4x-5)/x\in\mathbb{R}\}$

2) $-3x+12y-2=0$ يعني $12y=3x+2$ يعني $y=\frac{3x+2}{12}$

يعني $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}$ اذن : $S=\left\{\left(x;\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

3) $7x-14y+1=0$ يعني $7x=14y-1$ يعني $x=\frac{14y-1}{7}$

يعني $x=2y-\frac{1}{7}$ اذن : $S=\left\{\left(2y-\frac{1}{7};y\right)/y\in\mathbb{R}\right\}$

تمرين 22:

حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات التالية :

1) $2x-y+1=2y-2x+5$ $\quad$ 2) $x+5=y+5$

3) $3x+2y-2=2y-2$ $\quad$ 4) $x+y=2x-1$

أجوبة 1) $2x-y+1=2y-2x+5$ يعني $4x-3y-4=0$ يعني $4x=3y+4$

يعني $x=\frac{3}{4}y+1$ ومنه $S=\left\{\left(\frac{3}{4}y+1;y\right)/y\in\mathbb{R}\right\}$

2) $x+5=y+5$ يعني $y=x$

ومنه $S=\{(x;x)/x\in\mathbb{R}\}$

3) $3x+2y-2=2y-2$ يعني $3x=0$ يعني $x=0$

ومنه $S=\{(0;y)/y\in\mathbb{R}\}$

4) $x+y=2x-1$ يعني $-x+y+1=0$

يعني $y=x-1$ ومنه $S=\{(x;x-1)/x\in\mathbb{R}\}$

تمرين 23:

نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث :

$P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1. بين أن -1 هو جدر للحدودية $P(x)$
2. بين أن : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

نضع : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

3. Δ هو مميز ثلاثية الحدود $Q(x)$ تأكد أن $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$
4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x)=0$
5. استنتج حلول المعادلة : $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$
6. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$
7. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $P(x)\leq0$

أجوبة 1): $P(-1)=(-1)^3-\sqrt{2}(-1)^2-(-1)+\sqrt{2}$

$P(-1)=-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=0$

اذن 1- هو جدر للحدودية $P(x)$

2) $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$=x^3-\sqrt{2}x^2-x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}$

$=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

3) $\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4\times1\times\sqrt{2}$

$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\times1+(1)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

4) $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$x_1=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ ومنه: $S=\left\{\sqrt{2},1\right\}$

5) $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

يمكن كتابتها على الشكل : $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

نضع: $X=\sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل : $X^2-\left(\sqrt{2}+1\right)X+\sqrt{2}=0$

حسب السؤال السابق : $X_1=\sqrt{2}$ أو $X_2=1$

يعني $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ أو $\sqrt{x_2}=1$

يعني $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ أو $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=(1)^2$

يعني $x_1=2$ أو $x_2=1$ $S=\{2,1\}$

6) $P(x)=0$ يعني $x+1=0$ أو $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$

يعني $x=-1$ أو $x_1=\sqrt{2}$ أو $x_1=1$ **ومنه:** $S=\left\{-1,1,\sqrt{2}\right\}$

7) $P(x)\le0$ يعني $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)\le0$

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$		+		+	0	−	0	+	
$x+1$		−	0	+		+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

$S=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right]$

تمرين 24: نعتبر المعادلة : $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

1. نضع : Δ هو مميز ثلاثية الحدود $P(x)$ تأكد أن $\Delta=14+4\sqrt{6}$
2. املأ الفراغات التالية: $14+4\sqrt{6}=(...+...)^2$
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$
4. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $P(x)>0$
5. استنتج حلول المعادلة : $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

أجوبة 1): $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2\sqrt{6}$

أي $\Delta=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+8\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

2) $14+4\sqrt{6}=14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

3) $P(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

بما أن $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ فان للمعادلة حلين هما:

$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$x_2=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$ $S=\left\{\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

4)

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		+	0	−	0	+	

$S=\left]-\infty,-2\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$

5) $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

يمكن كتابتها على الشكل : $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

نضع : $X=\sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل :

$X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

حسب السؤال السابق : $X_1=\sqrt{2}$ أو $X_2=-2\sqrt{3}$

يعني $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ أو $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$

نلاحظ أن المعادلة : $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ ليس لها حل لأن الجذر دائما موجب

ومنه $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ يعني $x_1=2$ ومنه $S=\{2\}$

تمرين 25: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية: $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

باستعمال طريقة التعويض

الجواب: نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$4x+y=10$ يعني $y=10-4x$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$-5x+2y=-19$ يعني $-5x+2(10-4x)=-19$

يعني $-5x-8x=-19-20$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y=10-4x$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

تمرين 26: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية: $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

باستعمال طريقة التأليفة الخطية

الجواب: الجواب :نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل على :

$\begin{cases}-8x-2y=-20\\-5x+2y=-19\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$-8x-2y-5x+2y=-20-19$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x+y=10$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

تمرين 27: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$(1)\begin{cases}x+2y=4\\-x+4y=2\end{cases}$ باستعمال طريقة المحددة

الجواب : طريقة المحددة:

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}1&2\\-1&4\end{vmatrix}=6\neq0$ و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{12}{6}=2$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}1&4\\-1&2\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{6}{6}=1$ و منه: $S=\{(2,1)\}$

تمرين 28: باستعمال طريقة مناسبة

حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمات التالية :

1) $\begin{cases}x-2y=1\\-2x+4y=-2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-4y=2\\-x+\dfrac{4}{3}y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$

3) $\begin{cases}\left(\sqrt5-\sqrt3\right)x+\left(\sqrt2-1\right)y=0\\\left(\sqrt2+1\right)x+\left(\sqrt5+\sqrt3\right)y=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=11\\x^2-y^2=44\end{cases}$

أجوبة : 1)محددة النظمة هي: $\Delta=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&4\end{vmatrix}=0$

$\begin{cases}x-2y=1\\-2x+4y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\-2(x-2y)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\x-2y=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow x-2y=1\Leftrightarrow -2y=1-x\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x$

ومنه النظمة (S) لها عدد لا منته من الحلولاذن :

$S=\left\{\left(x;\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

2) $\begin{cases}3x-4y=2\\-x+\dfrac{4}{3}y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=2\\3x-4y=1\end{cases}$ بضرب المعادلة الثانية في -3

وهذا غير ممكن ومنه $S=\varnothing$

3) $\begin{cases}\left(\sqrt5-\sqrt3\right)x+\left(\sqrt2-1\right)y=0\\\left(\sqrt2+1\right)x+\left(\sqrt5+\sqrt3\right)y=1\end{cases}$

محددة النظمة هي:

$\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt5-\sqrt3&\sqrt2-1\\\sqrt2+1&\sqrt5+\sqrt3\end{vmatrix}=\left(\sqrt5-\sqrt3\right)\left(\sqrt5+\sqrt3\right)-\left(\sqrt2+1\right)\left(\sqrt2-1\right)$

$\Delta=\left(\left(\sqrt5\right)^2-\left(\sqrt3\right)^2\right)-\left(\left(\sqrt2\right)^2-(1)^2\right)$ اذن $\Delta=(5-3)-(2-1)=1\neq0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}0&\sqrt2-1\\1&\sqrt5+\sqrt3\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-\left(\sqrt2-1\right)}{1}=-\sqrt2+1=1-\sqrt2$

و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}\sqrt5-\sqrt3&0\\\sqrt2+1&1\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-\left(\sqrt5-\sqrt3\right)}{1}=-\sqrt5+\sqrt3=\sqrt3-\sqrt5$

و منه: $S=\left\{\left(1-\sqrt2,\sqrt3-\sqrt5\right)\right\}$

4) $\begin{cases}x+y=11\\x^2-y^2=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\(x+y)(x-y)=44\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\11(x-y)=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\x-y=4\end{cases}$

وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$x+y+x-y=11+4$ يعني $2x=15$ يعني $x=\dfrac{15}{2}$

ونعوض x ب $\dfrac{15}{2}$ في المعادلة $x+y=11$ فنجد

$\dfrac{15}{2}+y=11$

أي $y=\dfrac{7}{2}$ و منه: $S=\left\{\left(\dfrac{15}{2},\dfrac{7}{2}\right)\right\}$

تمرين 29: 1) حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$\begin{cases}-7x-3y=4\\4x+5y=-2\end{cases}$

2) استنتج حلول النظمة التالية : $\begin{cases}\dfrac{-7}{x}-\dfrac{3}{y}=4\\\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=-2\end{cases}$

أجوبة : 1) محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}-7&-3\\4&5\end{vmatrix}=-35+12=-23\neq0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}4&-3\\-2&5\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{14}{23}$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}-7&4\\4&-2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{2}{23}$ ومنه: $S=\left\{\left(-\dfrac{14}{23},-\dfrac{2}{23}\right)\right\}$

2) لكي تكون للنظمة معنى يجب أن يكون لدينا : $x\neq0$ و $y\neq0$

$\begin{cases}\dfrac{-7}{x}-\dfrac{3}{y}=4\\\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7\dfrac{1}{x}-3\dfrac{1}{y}=4\\4\dfrac{1}{x}+5\dfrac{1}{y}=-2\end{cases}$ نضع: $X=\dfrac{1}{x}$ و $Y=\dfrac{1}{y}$

$x\neq0$ و $y\neq0$ فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}-7X-3Y=4\\4X+5Y=-2\end{cases}$

وسبق أن قمنا بحل هذه النظمة : $X=-\dfrac{14}{23}$ و $Y=-\dfrac{2}{23}$

و منه : $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{14}{23}$ و $\dfrac{1}{y}=-\dfrac{2}{23}$ يعني: $x=-\dfrac{23}{14}$ و $y=-\dfrac{23}{2}$

و بالتالي: $S=\left\{\left(-\dfrac{23}{14},-\dfrac{23}{2}\right)\right\}$

تمرين 30: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$\begin{cases}\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{3}{y-2}=4\\\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}=1\end{cases}$

أجوبة : نضع: $X=\dfrac{1}{x-1}$ و $Y=\dfrac{1}{y-2}$

$x\neq1$ و $y\neq1$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}5X+3Y=4\\-2X+Y=1\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=\dfrac{1}{11}$ و $Y=\dfrac{13}{11}$

و منه : $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{11}$ و $\dfrac{1}{y-2}=\dfrac{13}{11}$

يعني: $x-1=11$ و $y-2=\dfrac{11}{13}$ يعني: $x=12$ و $y=\dfrac{37}{13}$

و بالتالي: $S=\left\{\left(12,\dfrac{37}{13}\right)\right\}$

تمرين 31: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases}2\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\-3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=17\end{cases}$$

أجوبة: نضع: $X=\sqrt{x}$ و $Y=\sqrt{y}$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}2X+Y=6\\-3X+5Y=17\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد: $X=1$ و $Y=4$

و منه: $\sqrt{x}=1$ و $\sqrt{y}=4$ يعني: $\left(\sqrt{x}\right)^2=(1)^2$ و $\left(\sqrt{y}\right)^2=4^2$

يعني: $x=1$ و $y=16$ و بالتالي: $S=\{(1,16)\}$

تمرين 32: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases}2x^2-5y^2=1\\4x^2+3y^2=15\end{cases}$$

أجوبة: نضع: $X=x^2$ و $Y=y^2$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}2X-5Y=1\\4X+3Y=15\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد: $X=3$ و $Y=1$

و منه: $x^2=3$ و $y^2=4$

يعني: $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ و : $y=\sqrt{1}$ او $y=-\sqrt{1}$

يعني: $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ و : $y=1$ او $y=-1$

و بالتالي: $S=\left\{\left(\sqrt{3},1\right),\left(\sqrt{3},-1\right),\left(-\sqrt{3},1\right),\left(-\sqrt{3},-1\right)\right\}$

تمرين 33: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية :

$$\begin{cases}\left(x^2-3x+1\right)+\left(y^2-5x+4\right)=-3\\2\left(x^2-3x+1\right)-3\left(y^2-5x+4\right)=4\end{cases}$$

أجوبة: نضع: $X=x^2-3x+1$ و $Y=y^2-5x+4$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}X+Y=-3\\2X-3Y=4\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد: $X=-1$ و $Y=-2$

و منه: $x^2-3x+1=-1$ و $y^2-5x+4=-2$

يعني: $x^2-3x+2=0$ و $y^2-5x+6=0$

نحل المعادلة : $x^2-3x+2=0$ باستعمال المميز فنجد :

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(2)=1>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=2 \text{ و } x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{3}{2}$$

نحل المعادلة : $y^2-5x+6=0$ باستعمال المميز فنجد :

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=1>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$y_1=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1}=3 \text{ و } y_2=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1}=2$$

و بالتالي: $S=\{(1,3),(1,2),(2,3),(2,2)\}$

تمرين 34: حل مبيانيا في $\mathbb{R}^2$ المتراجحة التالية:

$$2x-y-2<0$$

الجواب: نرسم أولا المستقيم (D) الذي معادلته $2x-y-2=0$

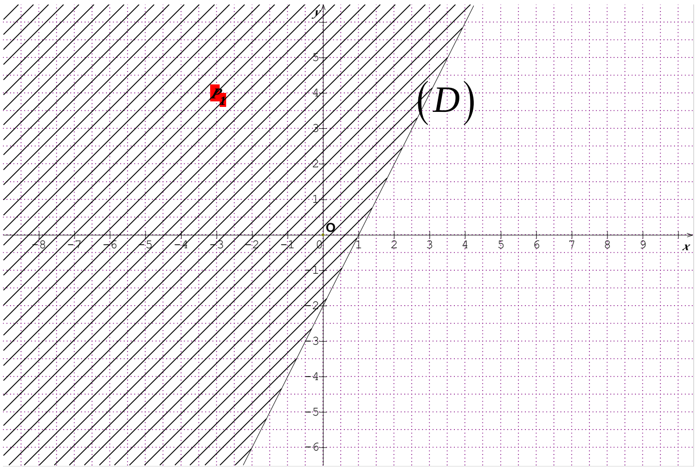
اذا كانت $x=0$ فان $2\times0-y-2=0$ أي $y=-2$

اذا كانت $x=1$ فان $2\times1-y-2=0$ أي $y=0$

اذن المستقيم يمر من النقطتين $A(0;-2)$ و $B(1;0)$

بالنسبة للنقطة $O(0;0)$ $2\times0-0-2<0$ يحقق المتراجحة

ومنه حلول المتراجحة مجموعة أزواج النقط التي تنتمي الى نصف المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي يضم النقطة $O(0;0)$



تمرين 35: حل مبيانيا في $\mathbb{R}^2$ المتراجحة التالية:

$$x-y-3\geq0$$

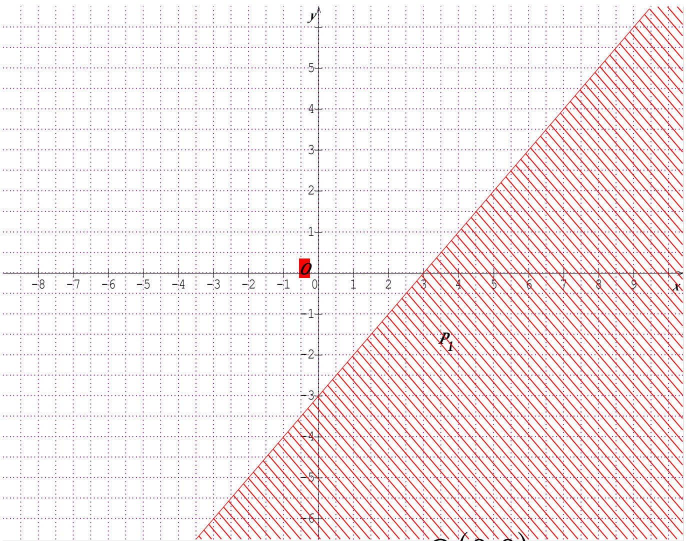
الجواب:

نرسم أولا المستقيم (D) الذي معادلته $x-y-3=0$

اذا كانت $x=0$ فان $0-y-3=0$ أي $y=-3$

اذا كانت $x=1$ فان $1-y-3=0$ أي $y=-2$

اذن المستقيم يمر من النقطتين $A(0;-3)$ و $B(1;-2)$



بالنسبة للنقطة $O(0;0)$ $0-0-3\geq0$ لا تحقق المتراجحة

ومنه حلول المتراجحة هي مجموعة أزواج النقط التي تنتمي الى نصف المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي لا يضم النقطة $O(0;0)$

تمرين 36: حل مبيانيا في $\mathbb{R}^2$ المتراجحة التالية:

$$2x-y<0$$

الجواب:

نرسم أولا المستقيم (D) الذي معادلته $2x-y=0$

اذا كانت $x=0$ فان $y=0$

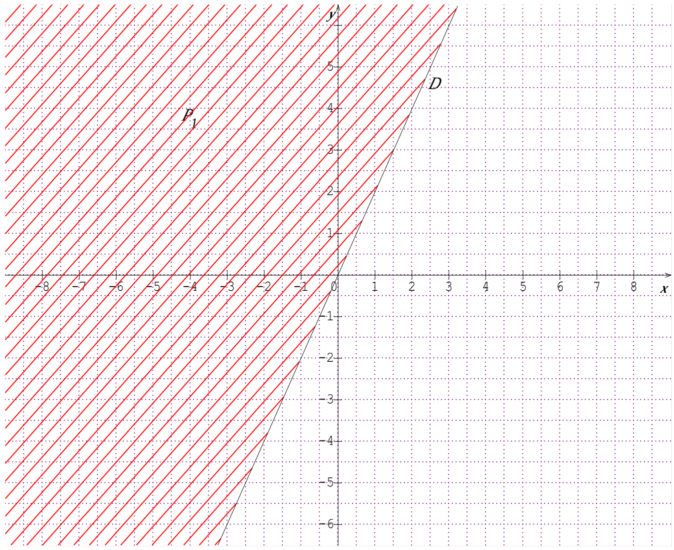
اذا كانت $x=1$ فان $y=2$

اذن المستقيم يمر من النقطتين $A(1;2)$ و $O(0;0)$

نأخذ نقطة أخرى عشوائيا مثلا $B(1;1)$

لدينا $2\times1-1<0$ يعني $1<0$ ومنه احداثيات $B(1;1)$ لا تحقق المتراجحة

ومنه حلول المتراجحة هي مجموعة أزواج النقط التي تنتمي الى نصف المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي لا يضم النقطة $B(1;1)$



تمرين 37: حل مبيانيا في $\mathbb{R}^2$ المتراجحة التالية:

$$3x+2y<2x+2y-1$$

الجواب: $3x+2y<2x+2y-1$ تعني

$3x-2x+2y-2y+1<0$ تعني $x+1<0$

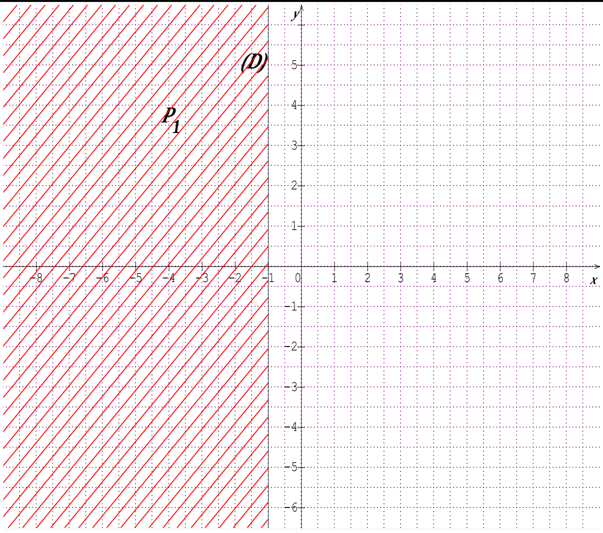
نرسم أولا المستقيم (D) الذي معادلته $x+1=0$

$x+1=0$ تعني $x=-1$

نأخذ نقطة أخرى عشوائيا مثلا $O(0;0)$

لدينا $0+1<0$ يعني $1<0$ ومنه احداثيات $O(0;0)$ لا تحقق المتراجحة

ومنه حلول المتراجحة هي مجموعة أزواج النقط التي تنتمي الى نصف المستوى المحدد بالمستقيم (D) والذي لا يضم النقطة $O(0;0)$



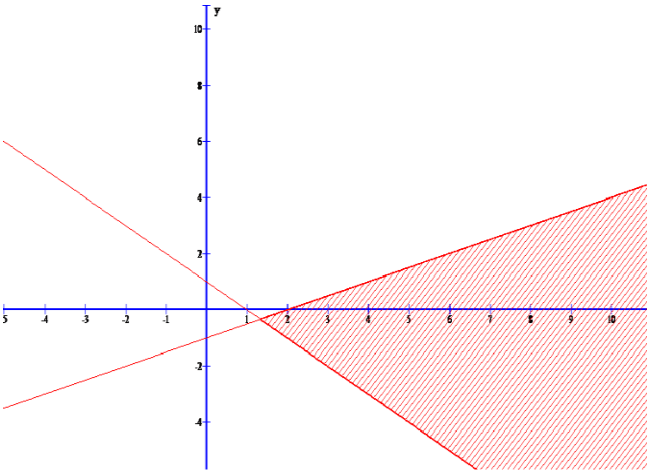
تمرين 38: حل مبيانيا النظمة التالية:

$$(S_1)\begin{cases}x+y-1>0\\-x+2y+2<0\end{cases}$$

الجواب : نرسم أولاً المستقيمات التالية :

$$x+y-1=0;-x+2y+2=0$$

وبعد ذالك يجب الحصول على الشكل التالي و هو الحل المبياني:



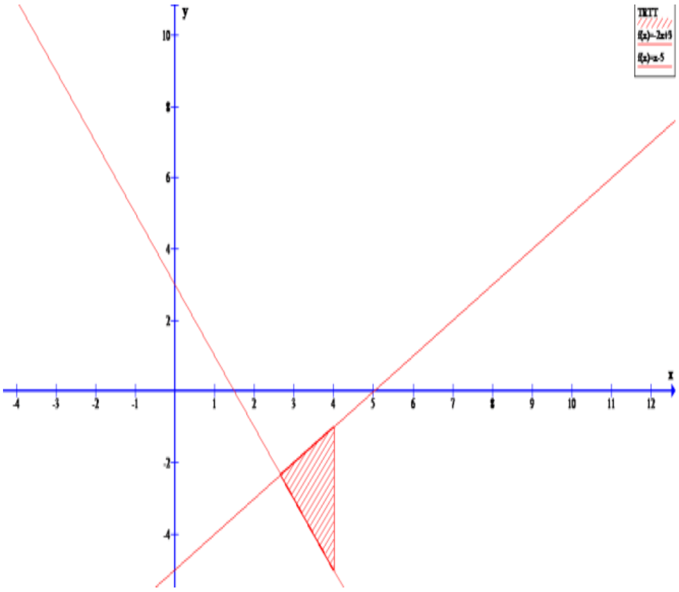
تمرين 39: حل مبيانيا النظمة التالية:

$$(S)\begin{cases}2x+y-3>0\\-x+y+5<0\\x<4\end{cases}$$

الجواب : نرسم أولاً المستقيمات التالية :

$$2x+y-3=0;-x+y+5=0;x=4$$

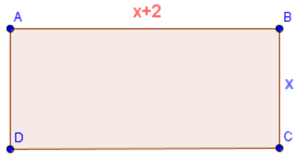
وبعد ذالك يجب الحصول على الشكل التالي و هو الحل المبياني:



تمرين 40 : أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد عن عرضه ب $2cm$

وأن مساحته تساوي $15cm^2$

الجواب:



ليكن x وعرض مستطيل اذن طوله هو : $x+2$ ومنه مساحته هي :

$S = x(x+2) = 15$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :

$x^2+2x-15=0$: $a=1$ و $c=-15$ و $b=2$

$\Delta = b^2-4ac = (2)^2 - 4\times1\times(-15) = 64 > 0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-2+8}{2\times1} = 3$ و $x_2 = \frac{-2-8}{2\times1} = -5 < 0$

ومنه:بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :

نأخذ $x=3$

وبالتالي طوله هو : $5cm$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien