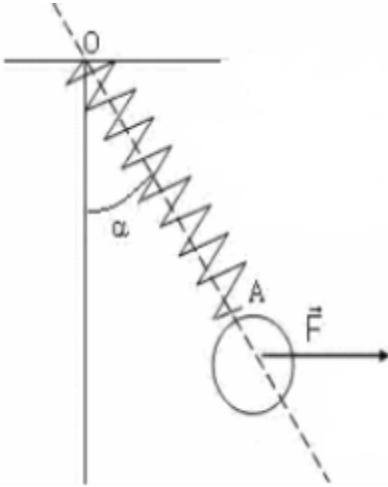


سلسلة تمارين حول توازن جسم تحت تأثير ثلاث قوى

- لدراسة توازن جسم صلب خاضع لثلاث قوى غير متوازية بالنسبة لمعلم أرضي:
- * تحديد المجموعة المدروسة.
 - * جرد القوى المطبقة على المجموعة المدروسة مع تحديد المتجهة المقرونة بكل قوة .
 - * تمثيل على تبيان متجهات القوى ذات المميزات المعروفة .
 - * تطبيق شرطي التوازن على المجموعة المدروسة .
 - يمكن استغلال شرط التوازن $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ بطريقتين مختلفتين :
 - الطريقة الأولى : الطريقة الهندسية أو المبيانية والتي تعتمد على الخط المضلعي وخطوط التأثير المتلاقية والمستوية .
 - الطريقة الثانية : الطريقة التحليلية
 - تحديد معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ م نسقط العلاقة المتجهية على المحورين Ox و Oy .
 - نحصل على علاقتين جبريتين بين شدات القوى المطبقة على المجموعة المدروسة .
 - من خلال هاتين العلاقتين نجيب على الأسئلة المطروحة .

تمرين 1:

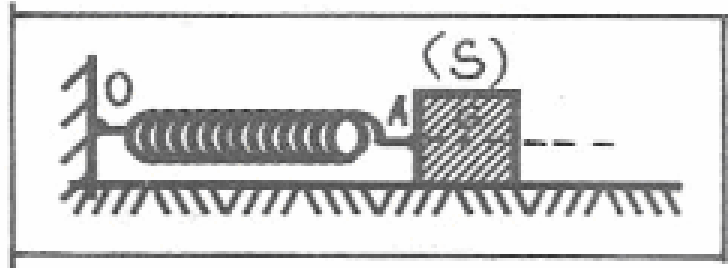


نعتبر كرة متجانسة كتلتها $m=500g$ معلقة بواسطة نابض ذي لفات غير متصلة وصلابته $k=100N/m$ مثبت عند النقطة O . عند مل نطبق قوة $\vec{F}$ أفقية شدتها $F=6N$ على الكرة يصبح طول النابض $OA=\ell=15cm$ والمجموعة في حالة توازن . أوجد عند التوازن :

- 1- توتر النابض .
- 2- الطول الأصلي للنابض ℓ_0 .
- 3- الزاوية α التي يكونها محور النابض OA مع الخط الرأسي المار من O .

تمرين 2:

نعتبر جسما صلبا (S) كتلته $m=200g$ مثبت بالطرف الحر لنباض ثابتة صلابته $k=50N/m$ بينما ثبت الطرف الآخر O بحامل ثابت (أنظر الشكل).

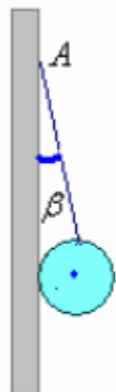


نزيح الجسم S نحو اليمين ، ثم نطلقه ، فيبقى في توازن عند موضع يكون فيه طول النابض هو :
 $OA=\ell=20cm$
 المحور OA للنباض مواز للسطح الأفقي ومار من G مركز قصور (S) ، والطول الأصلي للنباض هو $\ell_0=14cm$.

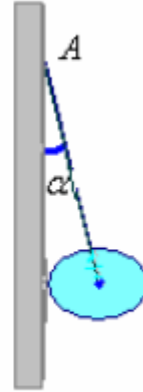
- 1- أحسب T شدة القوة التي يطبقها النابض على (S) .
- 2- بين أن اتجاه $\vec{R}$ متجهة القوة التي يطبقها السطح على (S) يمر من G مركز قصور الجسم (S) .
- 3- 1. مثل الخط المضلعي للقوى المطبقة على (S) بالسلم : $\rightarrow 1N1cm$ واستنتج شدة القوة $\vec{R}$.
 2. هل التماس بين (S) والمستوى الأفقي يتم باحتكاك ؟ علل جوابك .
 استنتج قيمة زاوية الاحتكاك φ التي يكونها اتجاه $\vec{R}$ مع الخط الرأسي .

تمرين 3:

نعلق بواسطة خيط كويرة على جدار رأسي عند النقطة A .
 يمثل الشكلان اسفله ، وضع الكويرة حيث يكون الخيط زاوية α مع الجدار شكل 1 وزاوية β مع الجدار شكل ب .



شكل 2

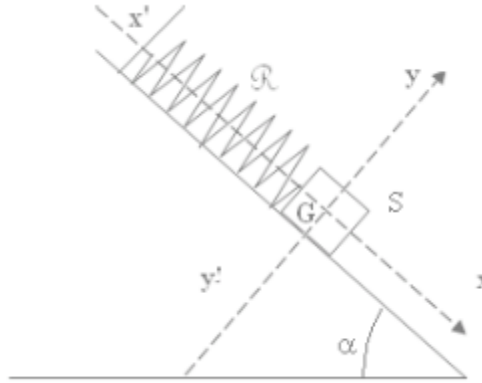


شكل 1

- 1- أجرد القوى المطبقة على الكويرة في كل حالة .
- 2- مثل القوى المطبقة على الكويرة في كل حالة .
- 3- في أي حالة يتم التماس بين الكويرة والجدار باحتكاك ؟ علل جوابك .

تمرين 4:

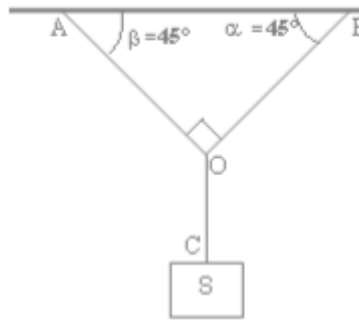
يمثل الكل أسفله توازن جسم صلب S كتلته $m=0,5\text{kg}$ فوق مستوى مائل بزاوية $\alpha = 45^\circ$ بالنسبة للمستوى الأفقي ومعلق بالطرف الحر لنباض ذي لفات غير متصلة كتلته مهملة وصلابته $k=25\text{N/kg}$.



- 1- أجرد القوى المطبقة على الجسم S .
- 2- علما أن شدة توتر النابض $F=3\text{N}$ باعتمادك على الرقعة المبيانية أوجد شدة القوة المطبقة من طرف المستوى المائل على الجسم S .
- 3- استنتج أن التماس يتم باحتكاك بين الجسم S والمستوى المائل.
- 4- أحسب زاوية الإحتكاك.

تمرين 5:

نعتبر المجموعة الممثلة في الشكل أسفله في حالة توازن حيط الخيوط OA و OB و OC غير قابلة للإمتداد وكتلتها مهملة.



نعطي :

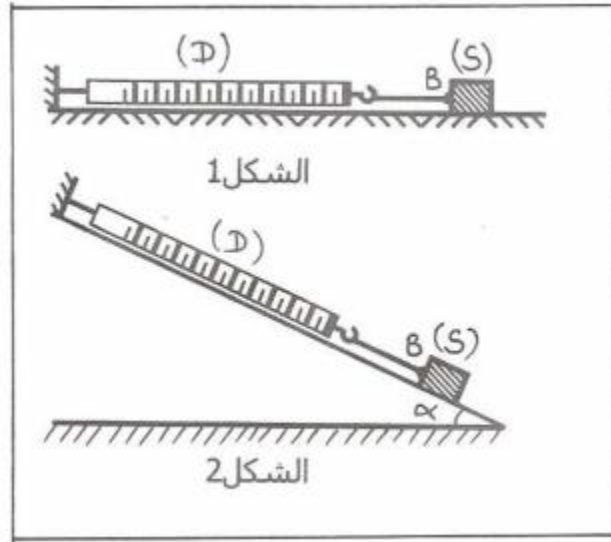
كتلة الجسم $(S)m=1\text{kg}$:

شدة الثقالة : $g=10\text{N/kg}$

- 1- أوجد مبيانيا توترات الخيوط OA و OB و OC .
- 2- نفس السؤال باستعمال الطريقة التحليلية.

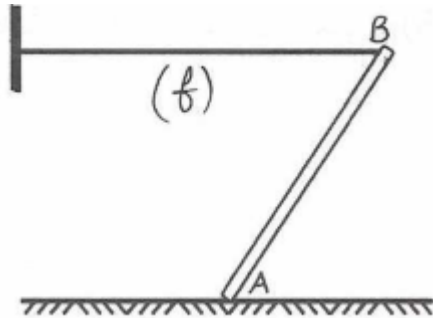
تمرين 6:

يمثل الشكل (1) جسما صلبا (S) كتلته $m=0,5\text{kg}$ في توازن على مستوى أفقي . يرتبط الجسم بدينامومتر (D) حيث يبقى محوره مواز للمستوى الأفقي .
نعطي : $g=10\text{N/kg}$



- 1- علما أن الإحتكاكات مهملة حدد القيمة التي يشير اليها الدينامومتر .
- 2- نميل المستوى الأفقي بزاوية $\alpha = 20^\circ$ كما يبين الشكل (2) وتبقى الإحتكاكات مهملة .
- 2-1- مثل بدون سلم القوى المطبقة على (S) .
- 2.2- أنشئ الخط المضلعي لهذه القوى بالسلم : $1\text{cm} \rightarrow 1\text{N}$
- 2.3- استنتج مبيانيا F شدة القوة التي يطبقها الدينامومتر (D) على (S) و R شدة القوة التي يطبقها السطح المائل على (S) .
- 3- نفترض الآن الإحتكاكات غير مهملة ، نزيل الدينامومتر (D) بحيث يبقى الجسم (S) في توازن فوق المستوى المائل .
- 3.1- أحسب الشدة R' للقوة التي يطبقها السطح المائل على (S) .
- 3.2- أوجد مبيانيا φ بين متجهة القوة $\vec{R}'$ والخط العمودي على المستوى المائل .
ما اسم هذه الزاوية ؟

تمرين 7:



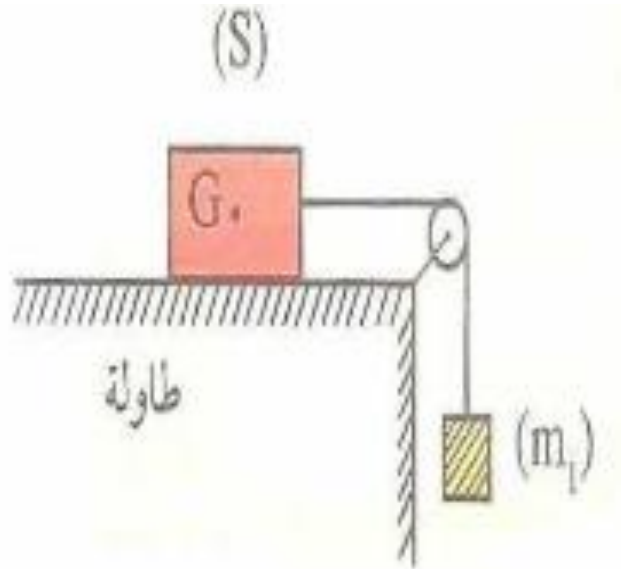
نعتبر ساقا AB متجانسة كتلتها $m=1\text{kg}$ مرتكزة على سطح أفقي عند طرفها A ، بينما نشد طرفها الآخر B بواسطة خيط أفقي (f) غير مدود وكتلته مهملة ، كما يبين الشكل .
نعطي : $g=10\text{N/kg}$

- 1- أجرد القوى المطبقة على العارضة ومثل على الشكل إتجاهات القوى المطبقة على الساق .
- 2- هل الإحتكاكات بين الساق والسطح مهملة ؟ علل جوابك .

- 3- علما أن شدة القوة التي يطبقها الخيط على الساق هي : $F=6N$.
 أنشئ الخط المضلعي للقوى المطبقة على الساق بالسلم $1cm \rightarrow 2N$
 4- استنتج شدة القوة $\vec{R}$ التي يطبقها السطح الأفقي على الساق ، واحسب φ زاوية الاحتكاك .

تمرين 8 :

نربط جسما صلبا (S) ، كتلته $m=1,2kg$ موضوعا فوق طاولة أفقية ، بأحد طرفي خيط يمر عبر مجرى بكرة (البكرة تغير اتجاه القوة ولا تغير شدتها) . نعلق في الطرف الآخر كتلة معلمة $m_1 = 100g$ تبقى المجموعة في توازن (انظر الشكل).
 حدد مميزات $\vec{R}$ القوة المطبقة من طرف الطاولة على الجسم الصلب (S) .
 نعطى : $g=10N/kg$



تصحيح تمارين حول توازن جسم تحت تأثير ثلاث قوى

تصحيح تمرين 1:

1- جرد القوى المطبقة على الكرة :

$\vec{P}$: وزن الكرة .

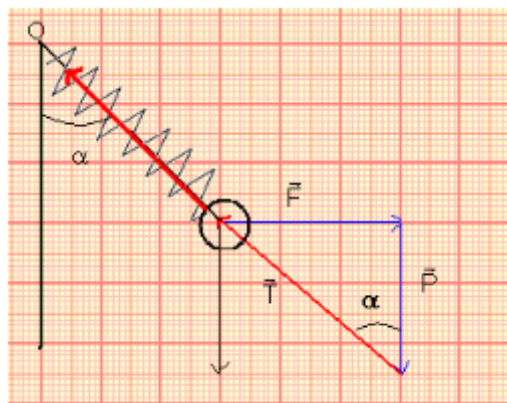
$\vec{T}$: توتر النابض .

$\vec{F}$: القوة الأفقية .

الكرة في توازن تحت تأثير ثلاث قوى شرطي التوازن يتحققان :

- خطوط تأثير القوى الثلاث مستوائية ومتلاقية .

- $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$



الخط المضلعي عبارة عن مثلث قائم الزاوية حسب مبرهنة فيثاغورس نكتب :

$$T^2 = F^2 + P^2 \Leftrightarrow T = \sqrt{F^2 + (mg)^2}$$

تطبيق عددي :

$$= 7,81 \text{ NT} = \sqrt{6^2 + (0,5 \times 10)^2}$$

2- الطول الأصلي للنابض :

نعلم أن شدة القوة المطبقة من طرف النابض تكتب :

$$\begin{aligned} T &= k(\ell - \ell_0) = k\ell - k\ell_0 \\ k\ell_0 &= k\ell - T \Leftrightarrow \ell_0 = \frac{k\ell - T}{k} \\ \ell_0 &= \ell - \frac{T}{k} \end{aligned}$$

تطبيق عددي :

$$\begin{aligned} \ell_0 &= 0,15 - \frac{7,81}{100} = 0,078 \text{ m} \\ \ell_0 &= 7,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

أي :

3- حساب الزاوية α :
لدينا العلاقة المثلثية :

$$\tan \alpha = \frac{F}{P} = \frac{6}{0,5 \times 10} = 1,2$$

بالتالي :

$$\alpha = 50,2^\circ$$

تصحيح تمرين 2 :

1- حساب الشدة T :
نعلم أن : $T = k \Delta \ell$ مع $\Delta \ell = \ell - \ell_0$
 $\Delta \ell = 20 - 14 = 6 \text{ cm} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
وبالتالي :

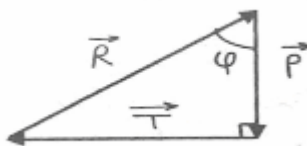
$$T = 50 \times 6 \cdot 10^{-2} = 3,0 \text{ N}$$

2- نبين أن اتجاه $\vec{R}$ يمر من G :

الجسم (S) في توازن تحت تأثير ثلاث قوى :
- $\vec{P}$ وزن الجسم .
- $\vec{R}$ القوة المقرونة بتأثير السطح .
- $\vec{T}$ توتر النابض .
بما أن اتجاه كل من القوتين $\vec{P}$ و $\vec{T}$ يمران من G وحسب شرط التوازن ، فإن متجهات القوى الثلاثة متلاقية في G ، الشيء الذي يؤكد أن اتجاه $\vec{R}$ يمر من G .

3- 1-3. الخط المضلعي :

باستعمال السلم : $1 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ N}$
نمثل المتجهة $\vec{P}$ بسهم رأسي طوله 2 cm
 $P = mg = 0.2 \times 10 = 2 \text{ N}$
نمثل المتجهة $\vec{T}$ بسهم أفقي طوله 3 cm
يتبين أن $\vec{P}$ و $\vec{T}$ متعامدان ونغلق الخط المضلعي بسهم يمثل $\vec{R}$ لأن الجسم في توازن .



الخط المضاعي مثلث قائم الزاوية نستعمل مبرهنة فيثاغورس لتحديد R

$$R^2 = P^2 + T^2$$

$$R = \sqrt{P^2 + T^2}$$

$$R = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,6 \text{ N}$$

3-2. طبيعة التماس :

نلاحظ أن اتجاه $\vec{R}$ غير عمودي على سطح التماس وبالتالي التماس يتم باحتكاك .
تحديد φ زاوية الإحتكاك التي يكونها اتجاه $\vec{R}$ مع اتجاه $\vec{P}$ حسب الخط المضلعي :

$$\tan = \frac{T}{P} = \frac{3}{2} = 1,5$$

وبالتالي :

$$\varphi = 56,3^\circ$$

تصحيح تمرين 3:

- 1- القوى المطبقة على الكوبيرة في كل من الحالتين :
 $\vec{P}$: وزن الكوبيرة .
 $\vec{T}$: القوة المطبقة من طرف الخيط .
 $\vec{R}$: القوة المطبقة من طرف الجدار .
- 2- بمالأن الكوبيرة في توازن في الحالتين ، فإن حسب شرط التوازن خطوط تأثير القوى الثلاث متلاقية .
- 3- في الشكل 2 نلاحظ أن اتجاه $\vec{R}$ ليس عموديا على الجدار وبالتالي فالتماس بين الجدار والكرة يتم باحتكاك .

تصحيح تمرين 4:

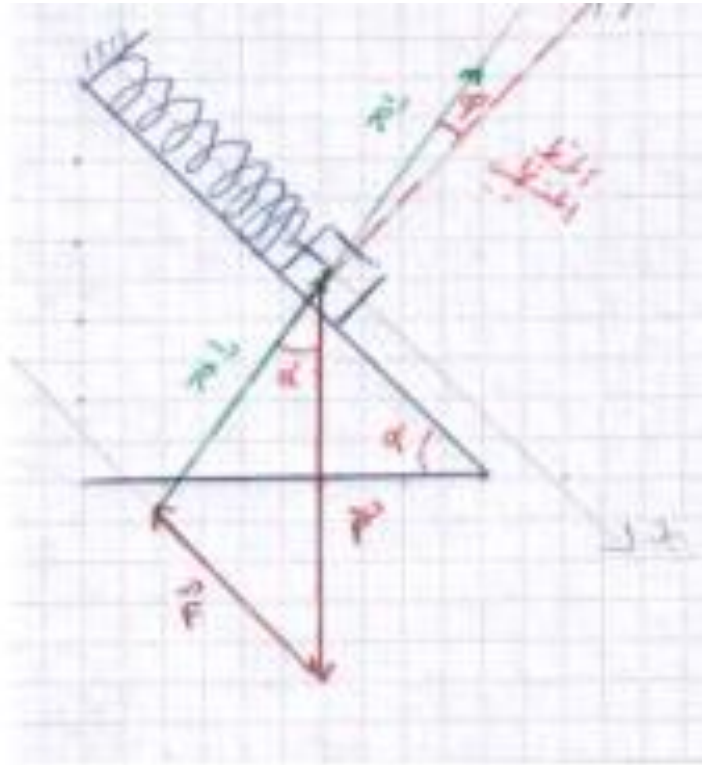
- 1- جرد القوى المطبقة على S :
 $\vec{P}$: وزن الجسم S .
 $\vec{F}$: توتر النابض .
 $\vec{R}$: القوة المقرونة بتأثير سطح التماس .
- 2- نستعمل الطريقة المبيانية :
نحدد مميزات القوى المعروفة :

الشدة	المنحى	خط التأثير	نقطة التأثير	القوة/المميزات
$P=mg=5N$	نحو أسفل	الخط الرأسى المار من G	G	الوزن : $\vec{P}$
$F=3N$	من x نحو x'	المحور xx'	A	توتر النابض : $\vec{F}$

نختار السلم : $1cm \rightarrow 1N$

نمثل الخط المضلعي للقوى الثلاث وهو مغلق : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$

من خلال التمثيل المبياني نحصل على $R \simeq 3,6N$



3- بما أن اتجاه المتجهة $\vec{R}$ غير عمودي على المستوى المائل ، فإن التماس بين الجسم S والسطح المائل والجسم يتم باحتكاك .

4- تحديد φ زاوية الاحتكاك :
نسقط العلاقة المتجهية على المحور xGx' :

$$P_x + F_x + R_x = 0 \Leftrightarrow P \sin \alpha - F - R \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow -F = P \sin \alpha - R \sin \varphi \quad (1)$$

نسقط العلاقة المتجهية على المحور yGy' :

$$P_y + F_y + R_y = 0 \Leftrightarrow -P \cos \alpha + R \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow R \cos \varphi = P \cos \alpha \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1)}{(2)} \tan \varphi = \frac{R \sin \varphi}{R \cos \varphi} = \frac{P \sin \alpha - F}{P \cos \alpha}$$

تطبيق عددي :

$$\tan \varphi = \frac{5 \sin(45^\circ) - 3}{5 \cos(45^\circ)} = 0,15$$

$$\varphi = 8,53^\circ$$

نستنتج :

تصحيح تمرين 5:

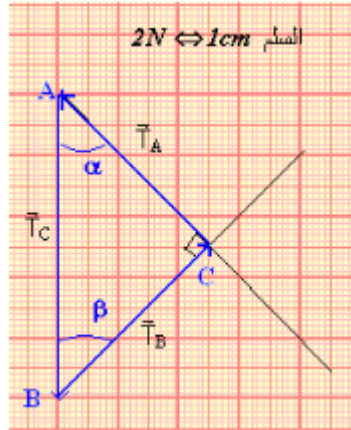
1- حساب شدات توترات الخيوط باستعمال الطريقة المبيانية :
دراسة توازن الجسم (S)

الجسم في توازن تحت تأثير قوتين : $\vec{P}$ و $\vec{T}'_c$

حسب شرطي التوازن : $P = T'_c = mg = 10N$

دراسة توازن النقطة O :

النقطة O في توازن تحت تأثير ثلاث قوى : $\vec{T}_A$ و $\vec{T}_B$ و $\vec{T}_C$
 حسب شرط التوازن : $\vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{T}_C = \vec{0}$ أي أن الخط المضلعي للقوى الثلاث مغلق .



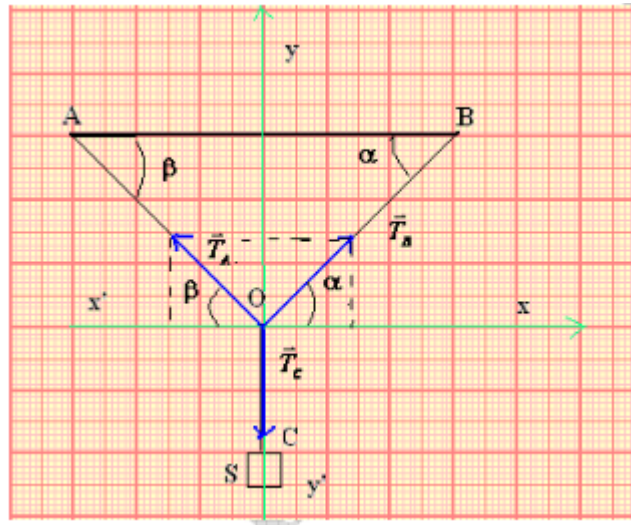
حسب الشكل فإن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في C.

$$T_A = T_B \text{ و حسب مبرهنة فيثاغورس : } T_C^2 = T_B^2 + T_B^2 \text{ أي } T_C^2 = 2T_B^2$$

$$T_B = \frac{T_C}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 7N \text{ ومنه : } T_C = T_B\sqrt{2}$$

$$T_A = T_B = 7N \text{ وبالتالي :}$$

2- حساب الشدات باستعمال الطريقة التحليلية :



اسقاط العلاقة المتجهية على المحور Ox :

$$T_{Cx} + T_{Bx} + T_{Ax} = 0 \Leftrightarrow -T_A \cos \beta + T_B \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

اسقاط العلاقة المتجهية على المحور Oy :

$$T_{Ay} + T_{By} + T_{Cy} = 0 \Leftrightarrow T_A \sin \beta + T_B \sin \alpha - T_C = 0 \quad (2)$$

$$\text{بما أن } \alpha = \beta = 45^\circ \text{ فإن : } \cos \alpha = \cos \beta = \sin \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

العلاقة (1) تكتب :

$$T_A = T_B \quad \text{أي} \quad -T_A + T_B = 0$$

والعلاقة (2) تكتب :

$$T_A \frac{\sqrt{2}}{2} + T_B \frac{\sqrt{2}}{2} - T_C = 0$$

$$T_A = \frac{T_C}{\sqrt{2}} = \frac{T_C \sqrt{2}}{2} = 7N \quad \text{أي} \quad T_A \sqrt{2} = T_C$$

تصحيح تمرين 6:

1- القيمة التي يشير إليها الدينامومتر (D) :
الجسم (S) في توازن تحت تأثير ثلاث قوى :
 $\vec{P}$: وزنه .

$\vec{F}$: القوة التي يطبقها الدينامومتر .

$\vec{R}$: القوة التي يطبقها السطح .

حسب الشرط الأول للتوازن :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$

بما أن الإحتكاكات مهملة فإن $\vec{R}$ عمودية على السطح .

بما أن الجسم لا ينغرز في المستوى الأفقي فإن : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ وبالتالي : $\vec{F} = \vec{0}$

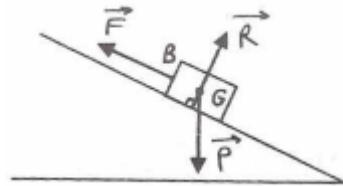
ومنه فإن الدينامومتر يشير إلى قيمة منعدمة .

2.1- تمثيل القوى :

الجسم (S) في توازن تحت تأثير ثلاث قوى :
 $\vec{P}$: وزنه

$\vec{F}$: تأثير الدينامومتر

$\vec{R}$: القوة التي يطبقها السطح المائل . ($\vec{R}$ عمودية على السطح المائل لان الاحتكاكات مهملة)



2.2- الخط المضلعي :

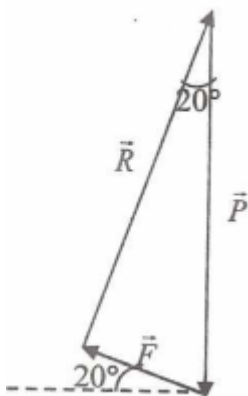
لإنشاء الط المضلعي نتبع الخطوات التالية :

$$P = mg = 0,5 \times 10 = 5N$$

نمثل المتجهة $\vec{R}$ بسهم رأسي طوله 5cm .

نمثل اتجاه القوة $\vec{F}$ المكونة لزاوية $\alpha = 20^\circ$ مع الخط الأفقي المار من رأس السهم الممثل لـ $\vec{P}$.

نمثل اتجاه $\vec{R}$ العمودي على اتجاه $\vec{F}$ والمار من أصل السهم الممثل لـ $\vec{P}$.



2.3- حساب شدتي القوتين $\vec{F}$ و $\vec{R}$:

نقيس طول سهم المتجهة $\vec{F}$ فنجد 1,7cm باستعمال السلم نجد : $F=1,7N$
نقيس طول سهم المتجهة $\vec{R}$ نجد 4,7cm إذن : $R=4,7N$

1.3- حساب الشدة R' :

عند إزالة الدينامومتر (D) تنعدم شدة القوة $\vec{F}$ ويصبح (S) في توازن تحت تأثير قوتين :
 $\vec{P}$: وزنه

$\vec{R}$: القوة التي يطبقها السطح المائل .

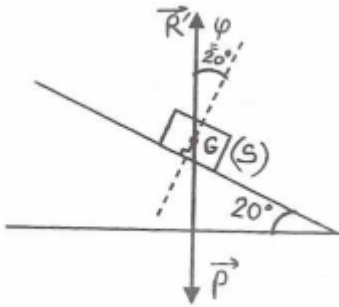
لدينا حسب شرط التوازن :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \text{ ومنه : } R=P=5N$$

3.2- حساب الزاوية φ :

باستعمال المنقلة نجد : $\varphi = \alpha = 20^\circ$

نسمي φ زاوية الإحتكاك .



تصحيح تمرين 7:

1- جرد القوى :

تخضع الساق الى ثلاثة قوى :

وزنها $(G, \vec{P})$.

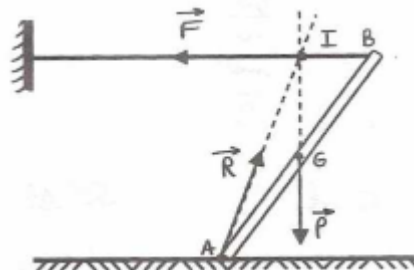
القوة التي يطبقها الخيط $(B, \vec{T})$

القوة التي يطبقها السطح $(A, \vec{R})$

* اتجاه $\vec{P}$ رأسي يمر من G .

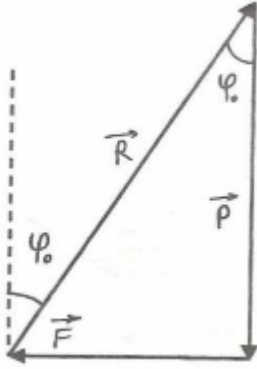
* اتجاه $\vec{F}$ أفقي يطابق الخيط ويقاطع اتجاه $\vec{P}$ في نقطة I .

بما أن الساق في توازن فإن خطوط تأثير القوى الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة هي I، وبالتالي يكون اتجاه $\vec{R}$ يمر من النقطتين A و I. أنظر الشكل .



2- طبيعة التماس :

من خلال الشكل يتبين أن اتجاه $\vec{R}$ غير عمودي على السطح الأفقي وبالتالي فالإحتكاكات غير مهمة .



3- الخط المظلعي :

لدينا : $P = mg = 1 \times 10 = 10N$ (متجهة رأسية نحو الأسفل) نمثل $\vec{P}$ بسهم طوله 5cm
 $F = 6N$ (متجهة أفقية نحو اليسار) نمثل $\vec{F}$ بسهم طوله 3cm
نغلق الخط المضلعي بسهم ممثل لـ $\vec{R}$ منحاه نحو الأعلى .

4- حساب شدة القوة R :

نقيس طول سهم المتجهة $\vec{R}$ نجد 5,8cm وبالتالي : $F = 2 \times 5,8 = 11,6N$

ملحوظة :

يمكن استعمال مبرهنة فيثاغورس $R = \sqrt{P^2 + F^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = 11,66N$
حساب φ :

باستعمال المنقلة أو بتطبيق العلاقة المثلثية :

$$\tan \varphi = \frac{F}{P} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\varphi = 31^\circ$$

وبالتالي :