السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

مبادئ في المنطق
المجموعات و التطبيقات
حل مقترح

استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

1 لدينا $\forall(a,b)\in(IR^+)^2\quad a\le b\Rightarrow\begin{cases}a+1\le b+1\\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{a+1}\le\sqrt{b+1}\\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$

بالتالي: $\forall(a,b)\in(IR^+)^2\quad \sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\Rightarrow a>b$

2 لدينا بالنسبة لـ $n=0$: $0^3-0+5^0-1=0=6\times0$ (العبارة صحيحة)

نفترض أن: $\exists k\in Z\quad n^3-n+5^{2n}-1=6k$ و نبين أن: $\exists k'\in Z\quad (n+1)^3-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=6k'$

لدينا :

$$(n+1)^3-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=n^3+3n^2+3n^2+1-n-1+5^{2n+2}-1=n^3-n+3n(n+1)+5^{2n}\times25-1$$
$$=6k-5^{2n}+1+3n(n+1)+25\times5^{2n}-1$$
$$=6k+3n(n+1)+24\times5^{2n}$$

و بما أن $n(n+1)$ عدد زوجي (جداء عددين متتابعين) فإن: $n(n+1)=2a\ /\ a\in IN$

منه : $(n+1)^3-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=6k+6a+24\times5^{2n}=6\left(k+a+4\times5^{2n}\right)$

نضع : $k'=k+a+4\times5^{2n}\in Z$ بالتالي : $\forall n\in IN\quad \exists k\in Z\quad n^3-n+5^{2n}-1=6k$

3 نفترض أن: $M<2$ ، إذن: $x<2$ و $y<2$ و $z<2$

منه:

$$\begin{cases}x<2\\y<2\\z<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\b+1<2\\1+\frac{1}{a}<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\b<1\\\frac{1}{a}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\\frac{1}{b}>1\\a>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\\frac{1}{b}+a>2\end{cases}\Rightarrow 2<a+\frac{1}{b}<2$$

وهذا غير ممكن إذن افتراضنا خاطئ و بالتالي العبارة المطلوبة صحيحة.

4 لدينا: $x^6-x+1=x(x^5-1)+1$ و $x^6-x+1=x^6+1-x$

- إذا كان : $x\ge1$ ، فإن: $x\ge1\Rightarrow x^5\ge1\Rightarrow x^5-1\ge0\Rightarrow x(x^5-1)\ge0\Rightarrow x^6-x+1>0$
- إذا كان : $x<1$ ، فإن: $x<1\Rightarrow\begin{cases}1-x>0\\x^6=(x^3)^2\ge0\end{cases}\Rightarrow x^6+1-x>0$

إذن في كل الحالات : $x^6-x+1>0$ ، بالتالي: $\forall x\in IR\ \ x^6-x+1>0$

5 لدينا : $x=y=1\ \Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1+1=2\\x+y=1+1=2\end{cases}\Rightarrow\ x^2+y^2=x+y=2$

و

$$x^2+y^2=x+y=2\ \Rightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=x^2-2x+1+y^2-2y+1$$
$$\Rightarrow\ (x-1)^2+(y-1)^2=x^2+y^2-2(x+y)+2=2-4+2=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\\y-1=0\end{cases}\Rightarrow\ x=y=1$$

بالتالي : $\forall(x,y)\in IR^2\quad \left(x^2+y^2=x+y=2\ \Leftrightarrow\ x=y=1\right)$

$\exists(a,b)\in\left(IR^{+}\right)^{2}\quad \sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\ \ et\ \ a\leq b$ $\exists n\in IN\quad \exists\forall\in Z\quad n^{3}-n+5^{2n}-1\neq 6k$	6

تمرين 2 :

- لدينا $A\cup(A\cap C)\cup(\overline{B}\cap A)=A$ (لأن: $A\cap C\subset A$ و أيضا : $\overline{B}\cap A\subset A$)
- لدينا: $(A\cup C)\setminus\overline{(C\setminus B)}=(A\cup C)\cap\overline{\overline{(C\setminus B)}}=(A\cup C)\cap(C\setminus B)=(A\cup C)\cap(C\cap\overline{B})=C\cap\overline{B}$

لأن: $C\cap\overline{B}\subset C\subset(A\cup C)$

إذا كانت مجموعة ضمن الأخرى يكون التقاطع هو المجموعة الأصغر و الاتحاد هو المجموعة الأكبر

تمرين 3 : نعتبر المجموعة: $K=\left\{(a,b)\in IN^{*}\times IN^{*}\ /\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}\right\}$

لدينا : $(a,b)\in K\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2a+2b=ab\Leftrightarrow 2a-ab+2b=0$ $(a,b)\in K\Leftrightarrow a(2-b)+2b=0\ \Leftrightarrow a(2-b)+2b-4+4=0\Leftrightarrow a(2-b)+2(b-2)=-4$ $(a,b)\in K\Leftrightarrow(b-2)(-a+2)=-4\Leftrightarrow(b-2)(a-2)=4$	1
لدينا حسب السؤال السابق ، و بما أن قواسم 4 الموجبة هي 1 و 2 و 4 فإن: $(a,b)\in K\Leftrightarrow(a-2,b-2)\in\{(1,4);(-1,-4);(2,2);(-2,-2)\}\Leftrightarrow(a,b)\in\{(3,6);(1,-2);(4,4);(0,0)\}$ بالتالي: $K=\{(3,6);\ (1,-2)\ ;\ (4,4)\}$ (لأن $(0;0)\notin K$)	2

تمرين 4 : $f:IR\to IR$

$x\mapsto\dfrac{x}{1+\lvert x\rvert}$

لدينا: $\forall x\in IR\ 1-\lvert f(x)\rvert=1-\dfrac{\lvert x\rvert}{1+\lvert x\rvert}=\dfrac{1}{1+\lvert x\rvert}>0$ ، إذن: $\forall x\in IR\ \lvert f(x)\rvert<1$ منه: $\forall x\in IR\ \ f(x)\in\left]-1;1\right[$ بالتالي: $f(IR)\subset\left]-1;1\right[$ بما أن $2\notin\left]-1;1\right[$ و $f(IR)\subset\left]-1;1\right[$ فإن 2 لا سابق له بالتالي f ليس شمولا على IR	1
ليكن $(x;y)\in IR^{2}$ حيث $f(x)=f(y)$ إذن : $\dfrac{x}{1+\lvert x\rvert}=\dfrac{y}{1+\lvert y\rvert}$ نستنتج أن لـ x و y نفس الإشارة إذا كانا موجبان نستنتج أن: $f(x)=f(y)\Rightarrow\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{y}{1+y}\Rightarrow x+xy=y+xy\Rightarrow x=y$ إذا كانا سالبان نستنتج أن: $f(x)=f(y)\Rightarrow\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{y}{1-y}\Rightarrow x-xy=y-xy\Rightarrow x=y$ بالتالي f تطبيق تبايني	2
$x\in f^{-1}\left(\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\right)\ \Leftrightarrow\ f(x)\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\ \Leftrightarrow\ 0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ 0\leq\dfrac{x}{1+\lvert x\rvert}\leq\dfrac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ 0\leq 2x\leq 1+\lvert x\rvert$ $x\in f^{-1}\left(\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\right)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}2x\geq 0\\ 2x\leq 1+x\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x\geq 0\\ x\leq 1\end{cases}\ \Leftrightarrow\ 0\leq x\leq 1\ \Leftrightarrow\ x\in[0;1]$ بالتالي : $f^{-1}\left(\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\right)=[0;1]$	3

4	لدينا حسب السؤال الثاني f تباين على IR لنبين أنها شمول على $]-1;1[$ ، ليكن $y\in]-1;1[$ ، ولنحل المعادلة : $(E):\ f(x)=y\ ;x\in IR$ هذه المعادلة تكافئ : $y=\dfrac{x}{1+\|x\|}$ نستنتج منه أن لـ x و y نفس الإشارة إذا كان : $y\geq 0$ فإن: $x\geq 0$ منه : $(E):\Leftrightarrow \dfrac{x}{1+x}=y\Leftrightarrow x=y+xy\Leftrightarrow x-xy=y\Leftrightarrow x(1-y)=y\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{1-y}\ (y\neq 1)$ إذا كان : $y<0$ فإن: $x<0$ منه : $(E):\Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}=y\Leftrightarrow x=y-xy\Leftrightarrow x+xy=y\Leftrightarrow x(1+y)=y\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{1+y}\ (y\neq -1)$ في كل الحلات المعادلة تقبل حلا في IR ، إذن ف f شمول على $]-1;1[$ وبالتالي فهي تقابل من IR نحو $]-1;1[$ وتقابلها العكسي معرف كما يلي: $f^{-1}:\ ]-1;1[\rightarrow IR$ $x\mapsto \begin{cases}\dfrac{x}{1-x}\ ;0\leq x<1\\ \dfrac{x}{1+x};\ -1<x<0\end{cases}$	

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	مبادئ في المنطق المجموعات و التطبيقات	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

1) بين أن : $\forall(a,b)\in\left(IR^{+}\right)^{2}\quad \sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\Rightarrow a>b$

2) بين بالترجع أن: $\forall n\in IN\quad \exists k\in Z\quad n^{3}-n+5^{2n}-1=6k$

3) ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا ، نضع: $x=a+\frac{1}{b}$ و $y=b+1$ و $z=1+\frac{1}{a}$

وليكن M أكبر الأعداد x و y و z ، بين أن : $M\geq 2$

4) مستعملا برهانا بفصل الحالات برهن أن: $\forall x\in IR\quad x^{6}-x+1>0$

5) بين أن : $\forall(x,y)\in IR^{2}\quad \left(x^{2}+y^{2}=x+y=2\ \Leftrightarrow\ x=y=1\right)$

6) إعط نفي العبارتين الوادتين في السؤال 1 و 2

تمرين 2 : لتكن E مجموعة غير فارغة و A و B و C أجزاء منها.

1) بسط : $A\cup(A\cap C)\cup\left(\overline{B}\cap A\right)$ ، $(A\cup C)\setminus\overline{(C\setminus B)}$

2) بين أن: $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)=(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$

تمرين 3 : نعتبر المجموعة: $K=\left\{(a,b)\in IN^{*}\times IN^{*}\ /\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\right\}$

1) بين أن : $(a,b)\in K\Leftrightarrow\ (a-2)(b-2)=4$

2) اكتب المجموعة K بتفصيل

تمرين 4 : نعتبر التطبيق:

$$f:IR\rightarrow IR$$
$$x\mapsto\frac{x}{1+|x|}$$

1) بين أن $f(IR)\subset\left]-1;1\right[$ ثم استنتج أن f غير شمولي.

2) بين أن f تطبيق تبايني

3) بين أن: $f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)=[0;1]$

4) بين أن f تقابل من IR نحو $\left]-1;1\right[$ وحدد f^{-1} التطبيق العكسي لـ f