

تصحيح الفرض المحروس رقم 2

التمرين 1

$$f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x + 4 > 0 \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2) - \sqrt{x^2 - 2x + 4}}{(x+2) + \sqrt{x^2 - 2x + 4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{\left(1 + \frac{2}{x} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}\right) x}$$

$$= \frac{6}{2} = 3$$

معنى $y = 3$ هو رتبة أفقية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2 - \sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1}$$

$$= 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x) - \sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\frac{2}{x} - 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}$$

$$= 1$$

معنى $y = 2x + 1$ هو رتبة مائلة

$$f'(x) = (x+2) - \frac{(x^2 - 2x + 4)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$$

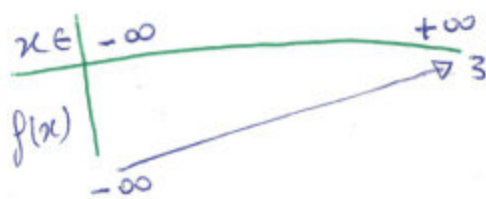
$$f'(x) = 1 - \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 4}} =$$

$$= 1 - \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$$

$$(x-1)^2 < x^2 - 2x + 4$$

$$x-1 < |x-1| < \sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

$f'(x) > 0$ و f متزايدة في \mathbb{R}



$$f(x) - x = \frac{-x^2 + 2x}{2 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}}$$

$\forall x \in \mathbb{R} -]0; 2[\quad -x^2 + 2x \geq 0$
(ب) يكون فوق $y=3$

$\forall x \in]0; 2[\quad -x^2 + 2x > 0$
(ب) يكون فوق $y=3$



$$U_{n+1} = f(U_n) \quad U_0 = 1$$

$$U_0 = 1$$

$0 < U_n < 2$ و متزايد

$$0 < U_{n+1} < 2$$

لذا $0 < U_n < 2$ و متزايدة

$$f(0) < f(U_n) < f(2)$$

$$0 < U_{n+1} < 2$$

$$0 < U_n < 2$$

$\forall x \in]0; 2[\quad f(x) > x$ لذا

$$f(U_n) > U_n \quad U_n \in]0; 2[$$

$$U_{n+1} > U_n$$

متزايدة

متزايدة (U_n)

$$U_0 = 1 \text{ متجاوزة } (U_n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq U_n < 2$$

$$|U_{n+1} - 2| = |U_n - \sqrt{U_n^2 - 2U_n + 4}|$$

$$= \frac{2|U_n - 2|}{U_n + \sqrt{U_n^2 - 2U_n + 4}}$$

$$\sqrt{U_n^2 - 2U_n + 4} \geq \sqrt{3} \geq \frac{3}{2} \quad U_n \geq 1$$

$$\frac{1}{U_n + \sqrt{U_n^2 - 2U_n + 4}} < \frac{2}{5}$$

$$|U_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{5} |U_n - 2|$$

مع $n=0$ نجد

$$|U_{n-2} - 2| = |-1 - 2| = 1 < 1$$

$$|U_n - 2| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$|U_{n+1} - 2| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$|U_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{5} |U_n - 2|$$

$$|U_n - 2| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$|U_{n+1} - 2| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad |U_n - 2| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$U_n < 2 \quad |U_n - 2| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\frac{4}{5} U_n < 2 \leq U_n + 2 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2 - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{5}\right)^k \leq U_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2$$

$$2n - 5 \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq U_n \leq 2n$$

$$2 - \frac{5}{n} - \frac{4^n}{5^{n+1}} \leq S_n \leq 2 \quad \Leftarrow$$

التمرين 2

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$U_0 = 1$$

$$U_0 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} U_n - U_{n+1} &= T_{2n} - T_{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+3} > 0 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n < U_{n+1}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= T_{2n+3} - T_{2n+2} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+3} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= T_{2n+1} - T_{2n} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} < 0 \end{aligned}$$

$$T_n = T_{2p} = U_p \quad n=2p$$

$$\begin{aligned} V_n &< U_n \text{ تناقصية } (V_n) \\ V_0 &= \frac{2}{3} \leq T_n = U_p \leq 1 = U_0 \\ & \quad n=2p+1 \end{aligned}$$

$$T_n = U_p$$

$$\frac{2}{3} = U_0 \leq V_p < U_p \leq U_0 = 1$$

$$\frac{2}{3} \leq T_n \leq 1$$

$$\text{محدودة } (T_n)$$

التمرين 3

$$1 = x \cdot y \Rightarrow x=1 \text{ و } y=1$$

$$h(1) = 2h(1)$$

$$h(1) = 0$$

$$1 = h'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{x-1}$$

ليكن a عدداً حقيقياً موجباً وقابلية
استيفاق n في 0

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

$$x \rightarrow 1 \quad x \rightarrow a \quad x = \frac{x}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{a} \frac{h(xa) - h(a)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{a} \left(\frac{h(x)}{x-1} \right) = \frac{1}{a}$$

$$n \text{ قابلية (الاستيفاق على) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

التمرين 4

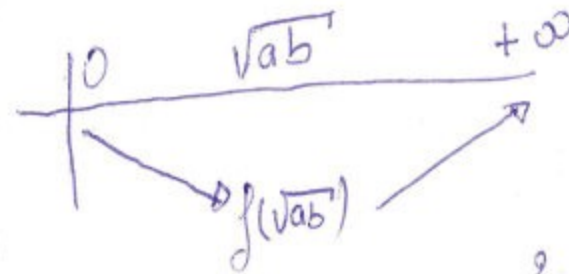
$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \text{زنج}$$

$$f(x) = a^3 + b^3 + x^3 - 3abx$$

لدينا

$$f'(x) = 3x^2 - 3ab = 3(x^2 - ab)$$

أي



$$f(\sqrt{ab}) = (a\sqrt{a} - b\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[: f(x) \geq 0 \quad \text{أي}$$

$$c \in]0; +\infty[\quad \text{لدينا}$$

$$f(c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \quad \text{و هذا}$$



نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و أعط تاويلا هندسيا للنتيجة

أ- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- أدرسه الفرع الانهائي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

أ- بيه أنه $f'(x) = 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

ب- بيه أنه الدالة f تزايدية قطعا على \mathbb{R} و أنجز جدول تغيرات الدالة f

أدرسه الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y = x$ (Δ)

أسم المنحنى (C_f)

6) نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بيه أنه $0 < U_n < 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- أدرسه رتبة المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ و استنتج أنه $1 \leq U_n < 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

أ- بيه أنه $\left| U_{n+1} - 2 \right| \leq \frac{4}{5} \left| U_n - 2 \right|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) (نأخذ $\sqrt{3} > 1,5$)

ب- بيه بالترجع أنه $\left| U_n - 2 \right| \leq \left(\frac{4}{5} \right)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ج- نضع $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_k$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n .

بيه أنه $2 - \frac{5}{n} + \frac{4^n}{n \times 5^{n-1}} \leq S_n \leq 2$ ($\forall n \geq 1$)



لكه $(T_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة بما يلي : $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

نضع $U_n = T_{2n}$ و $V_n = T_{2n+1}$

أ- أحسب U_0 و V_0

ب- بيه أنه $V_n < U_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

2) بيه أنه المتتالية $(V_n)_{n \geq 0}$ تزايدة و أدرسه رتبة المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$

3) استنتج أن المتتالية $(T_n)_{n > 0}$ محدودة



لكه h دالة معرفة مه $]0, +\infty[$ نحو \mathbb{R} و التي تحقق :

$$h(xy) = h(x) + h(y) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*) (\forall y \in \mathbb{R}^*)$$

أحد $h(1)$

2) نفترض أنه h قابلة للاشتقاق في النقطة 1 و أنه $h'(1) = 1$.

بيه أنه h قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و حدد دالتها المشتقة $h'(x)$



لكه a, b, c أعداد حقيقية موجبة بيه أنه $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$