ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2019
- الموضوع -

RS24

المادة	الرياضيات	مدة الانجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالأعداد العقدية.................................(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالاحتمالات..................................(3 ن)
- التمرين 3 يتعلق بالبنيات الجبرية.........................(3.5 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل.......................................(10 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين 1: (3.5 نقطة)

ليكن α عددا عقديا غير منعدم.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E_\alpha) \quad : \quad z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

0.25 | 1- أ) تحقق أن مميز المعادلة (E_α) هو: $\Delta = \alpha^2$

0.5 | ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_α)

0.5 | 2- علما أن $\alpha = |\alpha| e^{i\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)، اكتب حلي المعادلة (E_α) على الشكل الأسي.

II- نفترض أن المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط Ω و M_1 و M_2 ذات الألحاق على التوالي α و $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ و $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ و ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

0.5 | 1- أ) بين أن $R(\Omega) = M_1$ و أن $R(M_1) = M_2$

0.25 | ب) استنتج أن المثلثين $O\Omega M_1$ و OM_1M_2 متساويا الأضلاع.

0.25 | 2- أ) تحقق أن: $z_1 - z_2 = \alpha$

0.5 | ب) بين أن المستقيمين (ΩM_2) و (OM_1) متعامدان.

0.25 | ج) استنتج أن $O\Omega M_1M_2$ معين.

0.5 | 3- بين أن لكل عدد حقيقي θ، العدد $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha| e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha| e^{i\theta}}$ حقيقي.

التمرين 2: (3 نقط)

يحتوي كيس على n كرة مرقمة من 1 إلى n ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$). نسحب، الواحدة تلو الأخرى و بدون إحلال، جميع الكرات من هذا الكيس. لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

1 | 1- ما هو احتمال الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 بالتتابع و في هذا الترتيب؟

1 | 2- ما هو احتمال الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 في هذا الترتيب (سواء كانت متتابعة أم غير متتابعة)؟

1 | 3- نعتبر المتغير العشوائي X_n الذي يساوي العدد الضروري من السحبات للحصول على الكرات 1 و 2 و 3.

حدد قانون احتمال المتغير X_n.

التمرين 3: (3.5 نقطة)

نعتبر الفضاء المتجهي $(V_2,+,.)$ الذي بعده 2.

ليكن $(\vec{i},\vec{j})$ أساسا للفضاء V_2. نضع: $\vec{e_1}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$ و $\vec{e_2}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$

ليكن $*$ قانون التركيب الداخلي المعرف في V_2 بما يلي:

$$\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4\quad (x\vec{i}+y\vec{j})*(x'\vec{i}+y'\vec{j})=(xx'+yy')\vec{i}+(xy'+yx')\vec{j}$$

1- أ) بين أن $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ أساس للفضاء V_2 | 0.25

ب) تحقق أن: $\vec{e_1}*\vec{e_1}=\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}*\vec{e_2}=\vec{e_2}$ و $\vec{e_1}*\vec{e_2}=\vec{e_2}*\vec{e_1}=\vec{0}$ | 0.25

ج) بين أن: $\forall(X,X',Y,Y')\in\mathbb{R}^4\quad (X\vec{e_1}+Y\vec{e_2})*(X'\vec{e_1}+Y'\vec{e_2})=XX'\vec{e_1}+YY'\vec{e_2}$ | 0.25

2- أ) بين أن القانون $*$ تبادلي. | 0.25

ب) بين أن القانون $*$ تجميعي. | 0.25

ج) بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا. | 0.25

د) بين أن $(V_2,+,*)$ حلقة تبادلية واحدية. | 0.25

3- ليكن $\vec{u}\in V_2-\{\vec{0}\}$. نعتبر: $E_{\vec{u}}=\{\lambda\vec{u}\,/\,\lambda\in\mathbb{R}\}$

أ) بين أن $(E_{\vec{u}},+)$ زمرة جزئية للزمرة $(V_2,+)$ | 0.25

ب) بين أن $(E_{\vec{u}},+,.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء $(V_2,+,.)$ | 0.25

ج) بين أن: $E_{\vec{u}}$ مستقر بالنسبة للقانون $*$ $\Leftrightarrow$ الأسرة $(\vec{u}*\vec{u},\vec{u})$ مقيدة. | 0.5

4- نفترض أن: $\vec{u}*\vec{u}=\alpha\vec{u}$; $(\exists\alpha\in\mathbb{R}^*)$. نعتبر التطبيق

$$\varphi:\ \mathbb{R}^*\to E_{\vec{u}}$$
$$x\mapsto \frac{x}{\alpha}\vec{u}$$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E_{\vec{u}},*)$ | 0.5

ب) بين أن $(E_{\vec{u}},+,*)$ جسم تبادلي. | 0.25

التمرين 4: (10 نقط)

الجزء I : نعتبر الدالة g المعرفة على $I=]-1,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$

1- أ) بين أن: $\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=2$ | 0.25

ب) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ | 0.5

2- بين أن g قابلة للاشتقاق على I ، و أن: $g'(x)=-2(1+2x)\ln(1+x) \quad (\forall x\in I)$ 0.5

3- نعطي جدول تغيرات الدالة g :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	↘	$\frac{5}{4}-\frac{\ln 2}{2}$	↗	1	↘	$-\infty$

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعا وحيد α بحيث: $g(\alpha)=0$ 0.5

ب) تحقق أن: $\alpha<1$ (نأخذ: $\ln 2=0.7$) 0.25

ج) استنتج أن : $0<g(x) \quad (\forall x\in]-1,\alpha[)$ و أن: $g(x)<0 \quad (\forall x\in]\alpha,+\infty[)$ 0.5

الجزء II : نعتبر الدالة f المعرفة على $I=]-1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

ب) احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على I و أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2} \quad (\forall x\in I)$ 0.75

ب) اعط جدول تغيرات الدالة f على I 0.5

ج) تحقق أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ و أن: $f(x)\le\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)} \quad (\forall x\in I)$ 0.75

3- أ) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0. 0.25

ب) بين أن: $\ln(1+x)<x \quad (\forall x>0)$ 0.5

ج) استنتج أن: $f(x)<x \quad (\forall x>0)$ 0.25

د) مثل مبيانيا (T) و (C) .(نأخذ: $\alpha=0.8$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$) 1

الجزء III : نضع $J=\int_0^1 f(x)\,dx$

1 | 1- أ) باستعمال تغيير المتغير: $t=\dfrac{1-x}{1+x}$ ، بين أن: $J=\dfrac{\pi}{8}\ln 2$

0.5 | ب) حدد، بالسنتمر مربع، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات (T) و $x=0$ و $x=1$

1 | 2- باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، احسب: $K=\int_0^1 \dfrac{\arctan(x)}{1+x}\,dx$

انتهى

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2019
- عناصر الإجابة -

RR24

المادة	الرياضيات	مدة الانجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب)	المعامل	9

التمرين1			عناصر الإجابة	سلم التنقيط
I-	1-	أ)	التحقق من أن مميز (E_α) هو: $\Delta=\alpha^2$	0.25
		ب)	حلا (E_α) هما: $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ و $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$	0.5
	2		$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha=\lvert\alpha\rvert e^{i(\lambda+\frac{\pi}{3})}$; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha=\lvert\alpha\rvert e^{i(\lambda+\frac{2\pi}{3})}$	0.5
II	1-	أ)	$R(\Omega)=M_1$ و $R(M_1)=M_2$	0.25x2
		ب)	استنتاج.	0.25
	2-	أ)	التحقق.	0.25
		ب)	تعامد (ΩM_2) و (OM_1)	0.5
		ج)	استنتاج.	0.25
	-3		$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha}\div\frac{z_2-\lvert\alpha\rvert e^{i\theta}}{z_1-\lvert\alpha\rvert e^{i\theta}}\in\mathbb{R}$	0.5

التمرين2	عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-1	نعتبر الحدث A: " الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 بالتتابع و في هذا الترتيب " $P(A)=\frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega}=\frac{(n-2)(n-3)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$	1
-2	نعتبر الحدث B:" الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 في هذا الترتيب (سواء كانت متتابعة أم غير متتابعة) " $P(B)=\frac{\text{Card}\,B}{\text{Card}\,\Omega}=\frac{C_n^3(n-3)!}{n!}=\frac{1}{3!}$	1

1	$X_n(\Omega)=\{3,....,n\}$ $\forall k\in X_n(\Omega)\quad P(X_n=k)=\dfrac{\mathrm{Card}(X_n=k)}{\mathrm{Card}\Omega}=\dfrac{C_3^1C_{k-1}^2 2A_{n-3}^{k-3}(n-k)!}{n!}$ $=\dfrac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$	-3

سلم التنقيط	عناصر الإجابة		التمرين3
0.25	$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ أساس للفضاء V_2	أ)	-1
0.25	التحقق.	ب)	
0.25	$\forall(X,X',Y,Y')\in\mathbb{R}^4\quad (X\overrightarrow{e_1}+Y\overrightarrow{e_2})*(X'\overrightarrow{e_1}+Y'\overrightarrow{e_2})=XX'\overrightarrow{e_1}+YY'\overrightarrow{e_2}$	ج)	
0.25	تبادلية القانون *	أ)	-2
0.25	تجميعية القانون *	ب)	
0.25	$\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$ هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون *	ج)	
0.25	$(V_2,+,*)$ حلقة تبادلية واحدية.	د)	
0.25	$(E_{\vec{u}},+)$ زمرة جزئية للزمرة $(V_2,+)$	أ)	-3
0.25	$(E_{\vec{u}},+,.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء $(V_2,+,.)$	ب)	
0.5	الاستلزام المباشر..0.25 الاستلزام العكسي..0.25	ج)	
0.5	φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E_{\vec{u}},*)$ ....0.25 φ تقابل من $\mathbb{R}^*$ نحو $E_{\vec{u}}$ 0.25	أ)	-4
0.25	$(E_{\vec{u}},+,*)$ جسم تبادلي	ب)	

سلم التنقيط	عناصر الإجابة			التمرين4
0.25	$\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=2$	أ)	-1	-I

		ب)	$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	0.5
	-2		قابلية اشتقاق g على I ....0.25 $g'(x) = -2(1+2x)\ln(1+x)$ $(\forall x \in I)$ 0.25	0.5
	-3	أ)	وجود α ....0.25 وحدانية α 0.25	0.5
		ب)	التحقق.	0.25
		ج)	$0 < g(x)$ $(\forall x \in]-1,\alpha[)$ ....0.25 $g(x) < 0$ $(\forall x \in]\alpha,+\infty[)$ 0.25	0.5
-II	-1	أ)	حساب $\lim_{x\to-1^+} f(x)$ ....0.25 التأويل المبياني للنتيجة..................................0.25	0.5
		ب)	حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ....0.25 التأويل المبياني للنتيجة..................................0.25	0.5
	-2	أ)	قابلية اشتقاق f على I ....0.25 $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$ $(\forall x \in I)$ 0.5	0.75
		ب)	تغيرات f على I	0.5
		ج)	التحقق: $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ ....0.5 $f(x) \le \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ $(\forall x \in I)$ 0.25	0.75
	-3	أ)	معادلة مماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0	0.25
		ب)	$\ln(1+x) < x$ $(\forall x > 0)$	0.5

-III		ج)	الاستنتاج: $f(x) < x \quad (\forall x > 0)$	0.25
		د)	التمثيل المبياني للمستقيم (T).............................0.25 التمثيل المبياني للمنحنى (C).............................0.75	1
	-1	أ)	تغيير المتغير: $J = \frac{\pi}{8}\ln 2$	1
		ب)	$A = (\int_0^1 \lvert f(x) - x \rvert dx) \times u.a = (\int_0^1 (x - f(x))dx) \times 4cm^2$ $= (2 - \frac{\pi \ln 2}{2})cm^2$	0.5
	-2		باستعمال مكاملة بالأجزاء، نحصل على: $K = \frac{\pi \ln 2}{8}$	1