المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2020
- الموضوع –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- المدة الزمنية لإنجاز الموضوع هي 4 ساعات.
- يتكون الموضوع من (5) صفحات مرقمة من 1/5 إلى 5/5
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- **المترشح ملزم بانجاز التمرين3 و التمرين4 و الاختيار بين انجاز إما التمرين1 و إما التمرين2**
- **على المترشح أن ينجز في المجموع ثلاثة (3) تمارين:**

- **التمرين1** و يتعلق بالحسابيات **(اختياري)..3.5 نقط**
  و إما
  التمرين2 ويتعلق بالبنيات الجبرية **(اختياري).................................3.5 نقط**

- **التمرين3** و يتعلق بالأعداد العقدية **(إجباري)......................................3.5 نقط**

- **التمرين4** و يتعلق بالتحليل **(إجباري)..13 نقطة**

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

اختر وأنجز إما التمرين1 وإما التمرين2

و أنجز إجباريا التمرين3 و التمرين4

<u>التمرين1</u>: (3.5 نقط/ اختياري) (إذا اخترت إنجاز التمرين1 فلا تنجز التمرين2)

نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $(D)\ :\ 7x^3-13y=5$

1- ليكن (x,y) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حلا للمعادلة (D)

أ) بين أن x و 13 أوليان فيما بينهما.	0.5
ب) استنتج أن: $x^{12}\equiv 1\ [13]$	0.5
ج) بين أن: $x^3\equiv 10\ [13]$	1
د) استنتج أن: $x^{12}\equiv 3\ [13]$	0.5

2- استنتج من الأسئلة السابقة أن المعادلة (D) لا تقبل حلا في $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ — 1

التمرين2: (3.5 نقطة/اختياري) (إذا اخترت إنجاز التمرين2 فلا تنجز التمرين1)

نرمز بالرمز $M_2(\mathbb{R})$ لمجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير تبادلية و واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية.

نعتبر المجموعة الجزئية E من $M_2(\mathbb{R})$ المعرفة بما يلي: $E=\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix} / \ x\in\mathbb{R}\ ;\ y\in\mathbb{R}^*\right\}$

1- أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ — 0.5

ب) بين أن الضرب غير تبادلي في E — 0.5

ج) تحقق أن: $\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}^*)$ — 0.5

2- بين أن $(E,\times)$ زمرة غير تبادلية. — 0.5

3- نعتبر المجموعة الجزئية F من E المعرفة بما يلي: $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&x-1\\0&x\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}^*\right\}$

أ) بين أن التطبيق φ المعرف بما يلي: $\varphi(x)=M(x)\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R}^*)$ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$ — 0.5

ب) استنتج أن $(F,\times)$ زمرة تبادلية يجب تحديد عنصرها المحايد. — 1

التمرين3: (3.5 نقط/إجباري)

ليكن m عدد عقدي غير منعدم.

الجزء الأول:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $(E)\ :\ z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) (لاحظ أن m حلا للمعادلة (E)) — 0.5

2- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) المخالفين للحل m

أ) تحقق أن: $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{m}$ — 0.25

ب) في حالة: $m=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أكتب على الشكل الجبري z_1 و z_2 — 0.5

الجزء الثاني:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و B ذات الألحاق على التوالي: $a=me^{i\frac{\pi}{3}}$ و $b=me^{-i\frac{\pi}{3}}$

ليكن P مركز الدوران الذي زاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و يحول O إلى A

و Q مركز الدوران الذي زاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و يحول A إلى B

و R مركز الدوران الذي زاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و يحول B إلى O

1- بين أن النقط O و A و B غير مستقيمية. 0.25

2- أ) بين أن لحق P هو: $p=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ وأن لحق R هو: $r=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ 1

ب) بين أن لحق Q هو: $q=m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ 0.5

3- بين أن $OQ=PR$ و أن المستقيمين (OQ) و (PR) متعامدان. 0.5

التمرين4: (13 نقطة/إجباري)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;+\infty[$ بما يلي:

$$f(0)=0 \quad \text{و} \quad \text{لكل } x \text{ من }]0;+\infty[\text{ ،} \quad f(x)=x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t\mapsto \ln(t)$ في المجال $[x,x+1]$ ، بين أن: 0.5

$$\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x} \quad ; \quad (\forall x\in]0;+\infty[) \qquad (P)$$

2- أ) باستعمال العبارة (P) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 0.5

ب) باستعمال العبارة (P) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه. 0.5

3- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن :	0.75
$(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ; \quad f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$	
ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على I (يمكن استعمال العبارة (P))	0.5
ب) اعط جدول تغيرات f	0.25
4- لكل x من المجال $]0;+\infty[$ نضع: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$	
أ) تحقق أن: $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ; \quad g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$	0.75
ثم استنتج أن الدالة g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$ ؛	
ب) بين أن المعادلة $g(x)=1$ تقبل على $\mathbb{R}_+^*$ ، حلا وحيدا نرمز إليه بالرمز α	0.5
ثم تحقق أن α ينتمي إلى المجال $]1;2[$ (نأخذ: $\ln 2=0.7$ و $\ln\frac{3}{2}=1.5$)	
د) استنتج أن الحلول الوحيدة للمعادلة $f(x)=x$ هي: 0 و α	0.5
5-أ) مثل مبيانيا المنحنى (C)	0.5
(حدد نصف المماس على اليمين في النقطة O و الفرع الشلجمي للمنحنى (C))	
ب) بين أن الدالة f تقابل من I نحو I (نرمز بالرمز f^{-1} لتقابلها العكسي)	0.25

الجزء الثاني:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $0<u_0<\alpha$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$	
1- بين بالترجع أن: $0<u_n<\alpha \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N})$	0.5
2- أ) بين أن: $g(]0;\alpha[)=]0;1[$	0.5
ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا.	0.5
ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.	0.25
3- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0.5

الجزء الثالث:

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال I بما يلي: $F(x)=\int_x^1 f(t)dt \quad ; \quad (\forall x\in I)$

1- أ) أدرس حسب قيم x ، إشارة $F(x)$ — 0.5

ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على I و حدد مشتقتها الأولى F' — 0.5

ج) استنتج أن F تناقصية قطعا على I — 0.25

2- أ) بين أن: $F(x)\leq(1-x)\ln 2 \quad ; \quad (\forall x\in[1;+\infty[)$ — 0.5

ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ — 0.25

3- أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: — 0.5

$$F(x)=\frac{\ln 2}{4}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt \quad ; \quad (\forall x\in]0;+\infty[)$$

ب)أحسب $\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt$ لكل x من $]0;+\infty[$ (لاحظ أن : $\frac{t^3}{1+t}=t^2-t+1-\frac{1}{1+t}$) — 0.5

ج) استنتج أن: $F(x)=\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad (\forall x\in]0;+\infty[)$ — 0.5

د) احسب $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ ثم استنتج قيمة : $\int_0^1 f(t)dt$ — 0.5

4- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $v_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ و لكل عدد صحيح طبيعي k من $\{0,1,\dots,n-1\}$: — 0.5

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\leq-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ب) استنتج أن: $-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq v_n\leq-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}f\left(\frac{k}{n}\right) \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$ — 0.5

(لاحظ أن: $\frac{2k+1}{2n}<\frac{k+1}{n}$)

ج)- بين أن المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم حدد نهايتها. — 0.25

انتهى

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2020
- عناصر الإجابة –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NR 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

إنتباه:إذا أنجز المترشح التمرينين الاختياريين (بشكل كلي أو جزئي) تحتسب له فقط أحسن نقطة محصلة من بين النقطتين و ليس مجموع النقطتين.

التمرين1		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-1	أ)	إذا كان d قاسما مشتركا موجبا للعددين x و13 فإنه قاسم مشترك للعددين 13 و5 ، و منه $d=1$	0.5
	ب)	13 أولي و لا يقسم x و نطبق مبرهنة فيرما	0.5
	ج)	لدينا: $7x^3\equiv 5\ [13]$ إذن $x^3\equiv 2\times 5\ [13]$ لأن: $2\times 7\equiv 1\ [13]$	1
	د)	لدينا: $x^3\equiv 10\ [13]$ إذن $(x^3)^4\equiv 10^4\ [13]$ و منه $x^{12}\equiv 3\ [13]$	0.5
-2		إذا كان $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حلا للمعادلة (D) فإنه حسب السؤال 1- لدينا $x^{12}\equiv 1\ [13]$ و $x^{12}\equiv 3\ [13]$ إذن $3\equiv 1\ [13]$ و هذا غير ممكن.	1

التمرين2		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-1	أ)	استقرار E في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$	0.5
	ب)	البرهان على عدم تبادلية الضرب في E	0.5
	ج)	التحقق	0.5
-2		$(E,\times)$ زمرة غير تبادلية	0.5
-3	أ)	φ تشاكل	0.5
	ب)	φ تشاكل و $F=\varphi(\mathbb{R}^*)$ و $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية.......................................0.5 العنصر المحايد هو $I=\varphi(1)$..0.5	1

التمرين3	عناصر الإجابة	سلم التنقيط
الجزء الأول:		
-1	لدينا: $(E)\Leftrightarrow (z-m)(z^2-mz+m^2)=0$ بالإضافة إلى الحل m نجد الحلين: $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}m=e^{i\frac{\pi}{3}}m$ و $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}m=e^{-i\frac{\pi}{3}}m$	

-2	أ)	لدينا: $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{m}{m^2}$	0.25
	ب)	نجد $z_1=i\sqrt{3}$ و $z_2=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$	0.5
الجزء الثاني:			
-1		النقط O و A و B غير مستقيمية	0.25
-2	أ)	حساب p ....0.5 حساب r 0.5	1
	ب)	حساب q	0.5
-3		لدينا: $\frac{p-r}{q}=i$ و نستنتج أن: $OQ=PR$ ....0.25 $(OQ)\perp(PR)$ 0.25	0.5

التمرين4		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
الجزء الأول:			
-1		$\frac{1}{c_x}=\ln(x+1)-\ln x$; $\exists c_x\in]x;x+1[$ ....0.25 التأطير: $\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$ 0.25	0.5
-2	أ)	لدينا: $\frac{x^2}{1+x}<\frac{f(x)}{x}<x$ إذن $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$	0.5
	ب)	لدينا: $\frac{x^2}{1+x}<\frac{f(x)}{x}$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب	0.5
-3	أ)	الدالة قابلة للاشتقاق ....0.25 حساب $f'(x)$ 0.25	0.75
	ب)	لدينا: $0<\frac{1}{1+x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{3(1+x)}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. إذن: $f'(x)>0$.	0.5
	ج)	جدول تغيرات f	0.25
-4	أ)	حساب $g'(x)$ 0.5	0.75

السؤال		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
		لدينا: $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)} > \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x} > 0$ إذن: $g'(x)>0$ 0.25	
	ب)	مبرهنة القيم الوسيطية تعطي وجود α و الرتابة القطعية للدالة g تعطي وحدانيته أو كذلك g تقابل من $]0;+\infty[$ إلى $]0;+\infty[$ ....0.25 نتحقق من $g(1)<1<g(2)$ 0.25	0.5
	د)	حلول المعادلة: $f(x)=x \Leftrightarrow x=0$ أو $x=\alpha$	0.5
-5	أ)	إنشاء المنحنى	0.5
	ب)	f تقابل من I نحو I	0.25
الجزء الثاني:			
-1		الترجع و f^{-1} تزايدية و كون $f^{-1}(\alpha)=\alpha$ و $f^{-1}(0)=0$	0.5
-2	أ)	$g(]0;\alpha[)=]0;1[$	0.5
	ب)	من أجل $0<x<\alpha$، لدينا $0<g(x)<1$ بما أن $0<u_n<\alpha$ فإن $0<f(u_n)<u_n$ إذن: $0<u_n<f^{-1}(u_n)=u_{n+1}$	0,5
	ج)	متتالية تزايدية و مكبورة	0.25
-3		إذا وضعنا: $l=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ فإن $0<u_0\le l\le\alpha$ لأن $(\forall n\ge 1)\;;\;0<u_0<u_n<\alpha$ و بما أن f^{-1} متصلة على $[0;\alpha]$ (و بالخصوص في l) فإن l هي حل المعادلة $f(x)=x$ إذن $l=\alpha$	0.5
الجزء الثالث:			
-1	أ)	لدينا $f(x)\ge 0$ اذن F موجبة من أجل $0\le x\le 1$ و سالبة من أجل $x\ge 1$	0.5
	ب)	F قابلة للاشتقاق على I ....0.25 و $F'(x)=-f(x)\;;\;(\forall x\in I)$ 0.25	0.5
	ج)	$F'(x)=-f(x)<0\;;\;(\forall x\in I)$ و $F'(x)=0\Leftrightarrow x=0$	0.25
-2	أ)	لدينا: $f(x)\ge\ln 2\;;\;\forall x\ge 1$ ادن $\int_1^x f(t)dt\ge(x-1)\ln 2$	0.5
	ب)	$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$	0.25
-3	أ)	مكاملة بالأجزاء	0.5
	ب)	$\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt=\frac{5}{6}-\ln 2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)$	0.5
	ج)	المتساوية	0.5

0.5	$\lim_{x\to 0^+} F(x)=\frac{5}{24}$ ....0.25 F متصلة على اليمين في 0 إذن: $\int_0^1 f(t)dt = F(0)=\lim_{x\to 0^+} F(x)=\frac{5}{24}$ 0.25	د)	
0.5	تطبيق مبرهنة أو متفاوتة التزايدات المنتهية على الدالة F في المجال $\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]$ مع $f\left(\frac{k}{n}\right)\le f(x)\le f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$; $\left(\forall x\in\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]\right)$	أ)	-4
0.5	نلاحظ أن: $\frac{2k+1}{2n}<\frac{k+1}{n}$	ب)	
0.25	$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ و $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ مجاميع ريمان المرتبطة بالدالة f المتصلة على القطعة $[0,1]$ اذن المتتاليتين $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_n$ و $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_n$ متقاربتين و لهما نفس النهاية التي هي $F(0)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{24}$ و منه المتتالية (v_n) متقاربة (خاصية تلأطير النهايات) و نهايتها $-\frac{1}{2}F(0)=-\frac{5}{48}$	ج)	