المتجهات ـ الإزاحة

التمرين الأول

ABC مثلث. لنعتبر النقطتين E و M بحيث $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$.

1. أنشئ النقطتين E و M.
2. بين أن M هي منتصف $[AE]$

التمرين الثاني

A و B و C ثلاث نقط من المستوى غير مستقيمية.

1. أنشئ النقطة M بحيث $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
2. أنشئ النقطة N بحيث $\overrightarrow{AN}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
3. بين أن النقط A و M و N مستقيمية. مستقيمية.

التمرين الثالث

1. بسط التعابير التالية :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}$$

2. بين أن :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$$

التمرين الرابع

$[AB]$ قطعة و I منتصفها. لتكن M نقطة من المستوى.

بين أن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

التمرين الخامس

ABC مثلث. E و F و H ثلاث نقط من المستوى حيث

$$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\text{و} \quad \overrightarrow{AH}=AB+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

1. أنشئ النقط E و F و H.
2. بين أن $(BC)//(EF)$
3. أكتب $\overrightarrow{EF}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
4. أكتب $\overrightarrow{EH}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
5. استنتج أن النقط E و F و H مستقيمية.

التمرين السادس

$ABCD$ متوازي أضلاع و I مركزه.

لتكن النقطة M هي منتصف $[AB]$.

لنعتبر الإزاحة T ذات المتجهة $\overrightarrow{IB}$.

1. أنشئ النقط M' و A' و B' صور النقط M و A و B بالإزاحة T.
2. بين أن M' هي منتصف $[A'B']$
3. أنشئ النقطتان C' و D' صورتي C و D بالإزاحة T
4. ما هي طبيعة الرباعي $A'B'C'D'$ وحدد مركزه

التمرين السابع

(ζ) دائرة مركزها O وشعاعها $r=2$. $[AB]$ قطر للدائرة (ζ).

M نقطة من (ζ) بحيث $BM=3$.

لنعتبر الإزاحة ذات المتجهة t التي تحول النقطة O إلى النقطة M.

النقط E و F و G هي على التوالي صور النقط A و B و M.

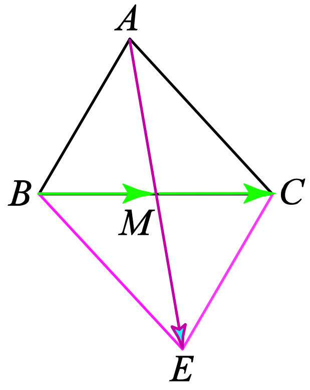
1. أنشئ الشكل.
2. ما هي طبيعة المثلث EFG
3. أحسب مساحة المثلث EFG
4. أنشئ صورة (ζ) بالإزاحة t.

تصحيح السلسلة رقم 8

التمرين الأول

1. إنشاء الشكل :

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ، نلاحظ أن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس الأصل، إذن نُنشئ مجموعهما بطريقة متوازي الأضلاع.



$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$: إذن M منتصف القطعة $[BC]$

2. لنبين أن M منتصف $[AE]$

الطريقة1 لدينا $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ أي $ACEB$ متوازي أضلاع

وبما أن M منتصف القطر $[BC]$ فإن M هي أيضا منتصف $[AE]$

الطريقة2

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}+\underbrace{\overrightarrow{MB}++\overrightarrow{MC}}_{=\vec{0}}$$

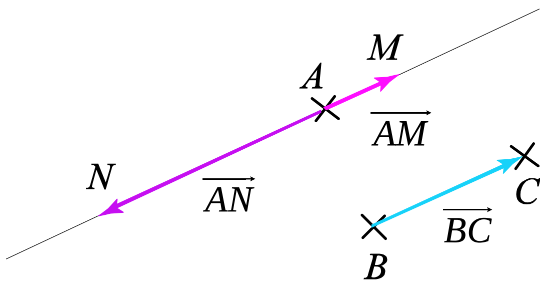
$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ لأن M منتصف $[BC]$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

التمرين الثاني

1. لدينا $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ يعني أن
$$\left.\begin{array}{l}(AM)//(BC)\\ \overrightarrow{AM} \text{ و} \overrightarrow{BC} \text{ لهما نفس المنحى}\\ AM=\dfrac{BC}{2}\end{array}\right\}$$

لدينا $\overrightarrow{AN}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ يعني أن
$$\left.\begin{array}{l}(AN)//(BC)\\ \overrightarrow{AN} \text{ و} \overrightarrow{BC} \text{ لهما منحيان متعاكسان}\\ AN=\dfrac{3BC}{2}\end{array}\right\}$$



2. لنبين أن النقط A و M و N مستقيمية

لدينا $AM=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ أي $-3\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ $[1]$ ، و $\overrightarrow{AN}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ $[2]$

من $[1]$ و $[2]$ نستنتج أن $\boxed{\overrightarrow{AN}=-3\overrightarrow{AM}}$ ومنه فإن النقط A و M و N مستقيمية.

التمرين الثالث

.1

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}$$
$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DO}$$
$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DO}$$
$$=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DO}$$
$$=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OD}$$
$$=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}$$
$$=\cancel{\overrightarrow{AF}}+\overrightarrow{BD}-\cancel{\overrightarrow{AF}}+\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$
$$=\overrightarrow{AD}$$

.2

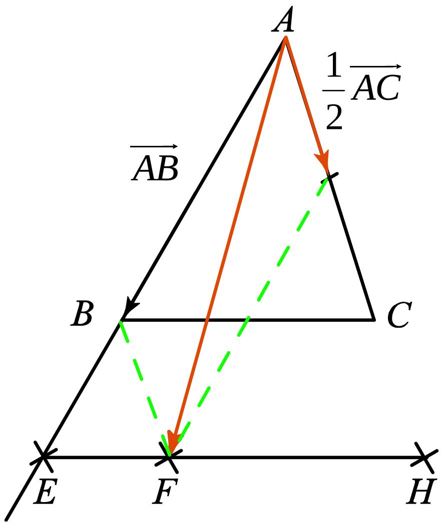
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}=\underbrace{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{AB}}+\underbrace{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}}_{\overrightarrow{AC}}-2\underbrace{\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}\right)}_{\overrightarrow{BC}}$$
$$=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{BM}-2\overrightarrow{MC}$$
$$=2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$$
$$=2\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$$

التمرين الرابع

لدينا I منتصف $[AB]$ يعني أن $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$$
$$=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}+\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}}$$
$$=2\overrightarrow{MI}$$

التمرين الخامس



1. إنشاء النقطة E

لدينا : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ يعني أن $\left\{\begin{array}{l} E\in(AB) \\ \overrightarrow{AE} \text{ و } \overrightarrow{AB} \text{ لهما نفس المنحى} \\ AE=\frac{3}{2}AB \end{array}\right.$

إنشاء النقطة F

لدينا : $\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ يعني أن $\left\{\begin{array}{l} (EF)//(CB) \\ \overrightarrow{CB} \text{ و } \overrightarrow{EF} \text{ لهما منحى متعاكسان} \\ EF=\frac{3}{2}CB \end{array}\right.$

إنشاء النقطة H : المتجهتان $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الأصل، نُنشئ مجموعيهما بطريقة متوازي الأضلاع (أنظر الشكل)

2. لدينا $\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ إذن $(EF)//(BC)$.

3.
$$\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)$$
$$\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\left(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)$$
$$\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

4.
$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$$
$$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{EH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

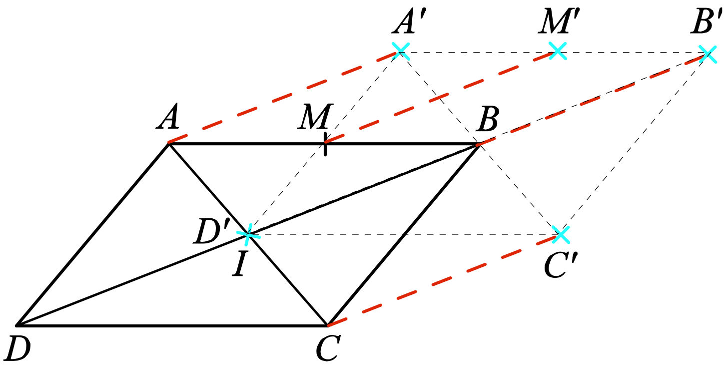
5. لدينا

$$\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{EF}=3\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{EF}=3\overrightarrow{EH}$$ حسب السؤال السابق

التمرين السادس



1. إنشاء النقطة M'

M' هي صورة M بالإزاحة T ذات المتجهة $\overrightarrow{IB}$

يعني أن $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{IB}$

يعني أن

$(MM')//(IB)$

$\overrightarrow{MM'}$ و $\overrightarrow{IB}$ لهما نفس المنحى

$MM'=IB$

إنشاء النقطة A'

A' هي صورة A بالإزاحة T ذات المتجهة $\overrightarrow{IB}$

يعني أن $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{IB}$

يعني أن

$(AA')//(IB)$

$\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{IB}$ لهما نفس المنحى

$AA'=IB$

إنشاء النقطة B'

B' هي صورة B بالإزاحة T ذات المتجهة $\overrightarrow{IB}$

يعني أن $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{IB}$

يعني أن

$B'\in(IB)$

$\overrightarrow{BB''}$ و $\overrightarrow{IB}$ لهما نفس المنحى

$BB'=IB$

2. لنبين أن M' منتصف $[A'B']$:

الطريقة الأولى :

M' هي صورة M بالإزاحة T و A' هي صورة A بالإزاحة T إذن $\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{AM}$

M' هي صورة M بالإزاحة T و B' هي صورة B بالإزاحة T إذن $\overrightarrow{M'B'}=\overrightarrow{MB}$

وبما أن M منتصف $[AB]$ فإن $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ وبالتالي فإن $\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{M'B'}$

ومنه فإن M' منتصف $[A'B']$

الطريقة الثانية :

لنبين أولا أن النقط A' و B' و M' مستقيمية :

A' هي صورة A بالإزاحة T و B' هي صورة B بالإزاحة T : إذن صورة المستقيم (AB) بالإزاحة T هو المستقيم $(A'B')$ وبما أن $M\in(AB)$ فإن $M'\in(A'B')$ (لأن صورة نقط مستقيمية بإزاحة هي نقط مستقيمية)

إذن النقط A' و B' و M' مستقيمية $[1]$

لدينا M' هي صورة M بالإزاحة T و A' هي صورة A بالإزاحة T إذن $A'M'=AM$

لدينا M' هي صورة M بالإزاحة T و B' هي صورة B بالإزاحة T إذن $B'M'=MB$

إذن $A'M'=M'B'$ $[2]$

من $[1]$ و $[2]$ نستنتج أن M' منتصف $[A'B']$

3. بنفس الطريقة كالسؤال الأول ننشئ النقط C' و D' $(D'=I)$: أنظر الشكل.

4. لنبين أن $A'B'C'D'$ متوازي أضلاع :

لدينا :

$ABCD$ متوازي أضلاع إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

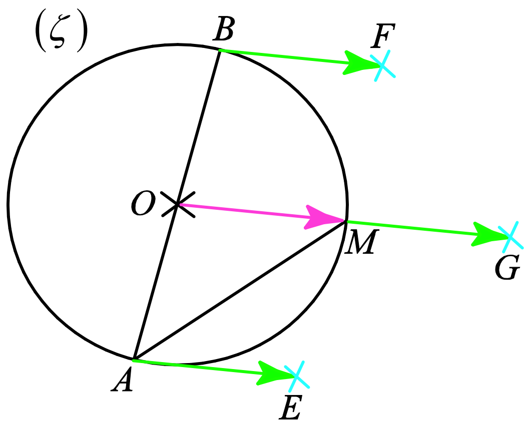
A' هي صورة A بالإزاحة T و B' هي صورة B بالإزاحة T إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$

C' هي صورة C بالإزاحة T و D' هي صورة D بالإزاحة T إذن : $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}$

إذن $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{D'C'}$ وبالتالي فإن $A'B'C'D'$ متوازي أضلاع.

التمرين السابع

1. الشكل



إنشاء النقطة E

E هي صورة A بالإزاحة t

يعني أن $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OM}$

يعني أن $(AE)//(OM)$ ؛ $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{OM}$ لهما المنحى ؛ $AE=OM$

بنفس الطريقة ننشئ النقطتين F و G (أنظر الشكل)

2. لدينا ABM مثلث قائم الزاوية في M لأن الضلع $[AB]$ هو قطر للدائرة (ζ). إذن $\widehat{AMB}=90°$

لدينا أيضا : E هي صورة A بالإزاحة t و F هي صورة B بالإزاحة t و G هي صورة M بالإزاحة t إذن صورة $\widehat{AMB}$ بالإزاحة t هي $\widehat{EGF}$

وبما أن صورة زاوية بإزاحة هي زاوية تقايسها فإن $\widehat{EGF}=90°$ وبالتالي فإن EFG مثلث قائم الزاوية في الرأس G.

3. مساحة المثلث EFG : $S_{EFG}=\dfrac{GE\times GF}{2}$

لدينا صورة قطعة بإزاحة هي قطعة تقايسها

صورة القطعة $[AM]$ بالإزاحة t هي القطعة $[EG]$ إذن $EG = AM = 3$

صورة القطعة $[AB]$ بالإزاحة t هي القطعة $[EF]$ إذن $EF = AB = 4$

صورة القطعة $[BM]$ بالإزاحة t هي القطعة $[FG]$ إذن $FG = BM$

لنحسب AM بواسطة مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

ABM مثلث قائم الزاوية في M إذن ح . م . ف . م : $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{7}$

إذن : $S_{EFG} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.