نصوص التمارين

1) (ξ) دائرة مركزها O وشعاعها r و M نقطة تقع داخل (ξ).
(Δ) مستقيم يمر من M ويقطع (ξ) في نقطتين A و B
(Δ') مستقيم آخر يمر من M و O ويقطع (ξ) في نقطتين E و F
أ) بين أن المثلثين MAE و MBF متشابهان.
ب) استنتج أن
$MA\times MB=ME\times MF=r^2-OM^2$.

2) ABC مثلث. لتكن B' المسقط العمودي للنقطة B على (AC) و C' المسقط العمودي للنقطة C على (AB) . أثبت أن : AC'×AB=AB'×AC .

3) ABC و MEN مثلثان متشابهان بحيث [AB] و [AC] متناظران على التوالي مع [ME] و [EN]
أ) أذكر الزوايا المتناظرة بالنسبة لهذين المثلثين.
ب) إذا علمت أن:
AB=5 و AC=6 و BC=8 و MN=4
فأحسب ME و EN.

4) ABC و DEF مثلثان متشابهان بحيث:
$\hat{A}=\hat{D}$ و $\hat{E}=\hat{C}$
إذا علمت أن نسبة التشابه هي $\frac{2}{3}$
وأن AB=9 و AC=6 و EF=8
فأحسب BC و DE و DF.

5) ABCD مستطيل بحيث AB=2BC
العمودي على(BD) المار من A يقطع (CD) في E
أ) بين أن المثلثين ADE و BCD متشابهان
ب) استنتج أن $DE=\frac{1}{4}CD$

6) ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A بحيث AB>AC
منصف الزاوية $[A\hat{C}B]$ يقطع [AB] في النقطة E .
المستقيم (Δ) العمودي على (BC) في النقطة B يقطع (EC) في النقطة F
1) أنجز الشكل بأكمله
2) أ - بين أن المثلثين AEC و BFC متشابهان.
ب - استنتج أن AE×FC=EC×FB

7) ليكن ABC مثلث متساوي الساقين في A .
على نصف المستقيم [AC) نعتبر نقطتين M و N
حيث $M\in[AC]$ و $M\hat{B}C=N\hat{B}C$ ($M\neq N$)
أ) قارن الزاويتين $[A\hat{B}N]$ و $[A\hat{M}B]$
ب) قارن المثلثين ABN و AMB
و استنتج أن AB²=AM×AN

8) ليكن ABC مثلث متساوي الساقين في A و لتكن $\xi(O,R)$ الدائرة المحيطة به. لتكن M منتصف [BC]
و F النقطة بحيث [BF] قطر في الدائرة $\xi(O,R)$
أ) بين أن المثلثين AFB و MCA متشابهان
ب) استنتج أن AB×MC=AF×AM

9) ABCD رباعي محدب محاط بدائرة (ξ) قطرها [AC].
لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على(BD)
قارن المثلثين ABH و ACD
و استنتج أن AB×AD=AC×AH

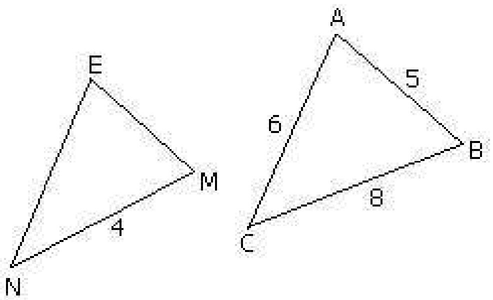
10) ABC مثلث متساوي الأضلاع لتكن D مماثلة A بالنسبة إلى (BC) و E نقطة من القطعة [AB]
المستقيم (DE) يقطع (AC) في F
أ) قارن المثلثين BDE و CFD
ب) استنتج أن الجداء BE×CF يضل ثابتا عندما تتغير E على [AB] .

11) ABC مثلث و M نقطة من نصف المستقيم [BA) حيث BM>BA
نفترض أن MA×MB=MC²
أ) قارن المثلثين MAC و MCB
و استنتج أن $A\hat{C}M=A\hat{B}C$
ب) بين أن المستقيم (MC) مماس للدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث ABC

12) $[x\hat{A}y]$ زاوية و M نقطة من منصفها الداخلي ($M\neq A$)
لتكن B نقطة من [Ax) و C نقطة من [Ay) حيث :
$AB=\frac{3}{4}AM$ و $AC=\frac{4}{3}AM$
أ) قارن المثلثين ABM و AMC
ب) لتكن B' مماثلة B بالنسبة إلى (AM)
بين أن $A\hat{M}B'=A\hat{C}M$
و استنتج أن الدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث MCB' مماسة للمستقيم (AM)

13) لتكن [AA'] و [BB'] و [CC'] ارتفاعات مثلث و H مركز تعامده.
أثبت أن $HA\times HA'=HB\times HB'=HC\times HC'$

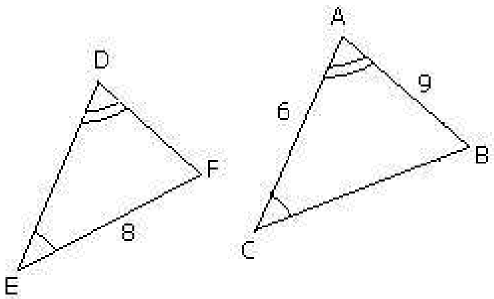
حلول تمارين المثلثات المتشابهة



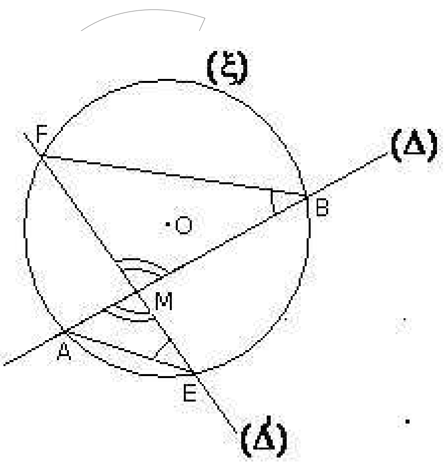
1) أ) ABC و MEN مثلثان متشابهان
[AB] و [AC] متناظران على التوالي مع [ME] و [NE]
و منه نستنتج أن الضلع [BC] متناظر مع الضلع [MN] .

الزوايا المتناظرة هي الزوايا المحصورة بين ضلعين متناظرين.
الزاوية $[B\hat{A}C]$ متناظرة مع الزاوية $[M\hat{E}N]$
و الزاوية $[A\hat{B}C]$ متناظرة مع الزاوية $[E\hat{M}N]$
و الزاوية $[A\hat{C}B]$ متناظرة مع الزاوية $[EN\hat{M}]$

ب) الأضلاع المتناظرة متناسبة يعني $\frac{AB}{EM} = \frac{AC}{EN} = \frac{BC}{MN}$
و لدينا AB=5 و AC=6 و BC=8 و MN=4
إذن $\frac{5}{EM} = \frac{6}{EN} = \frac{8}{4} = 2$ أي $\frac{5}{EM} = 2$ و $\frac{6}{EN} = 2$
وبالتالي $EM = \frac{5}{2}$ و $EN = 3$



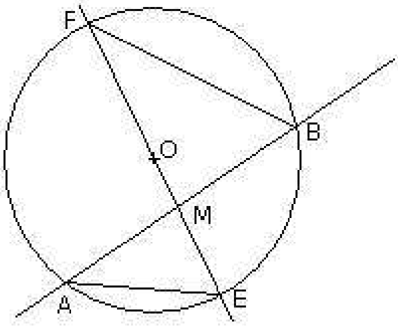
2) $\hat{A} = \hat{D}$ و $\hat{E} = \hat{C}$ و المثلثان ABC و DEF متشابهان
إذن $[\hat{A}]$ و $[\hat{C}]$ متناظرتان على التوالي مع الزاويتين $[\hat{D}]$ و $[\hat{E}]$
و بالتالي الزاوية $[\hat{B}]$ متناظرة مع الزاوية $[\hat{F}]$
و لدينا الأضلاع المتناظرة هي الأضلاع المحصورة بين زوايا متناظرة
أي [AB] و [AC] و [BC] متناظرة على التوالي مع [DF] و [DE] و [EF]
و بالتالي $\frac{AB}{DF} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{2}{3}$ وبما أن: AB=9 و AC=6 و EF=8
فإن: $\frac{9}{DF} = \frac{6}{DE} = \frac{BC}{8} = \frac{2}{3}$
أي $\frac{9}{DF} = \frac{2}{3}$ و $\frac{6}{DE} = \frac{2}{3}$ و $\frac{BC}{8} = \frac{2}{3}$
أي $DF = \frac{27}{2}$ و DE=9 و $BC = \frac{16}{3}$.



3) أ) لدينا الزاويتان $[A\hat{M}E]$ و $[F\hat{M}B]$ متقابلتان بالرأس M
إذن فهما متقايستان أي $A\hat{M}E = F\hat{M}B$
و الزاويتان $[M\hat{E}A]$ و $[F\hat{B}M]$ محيطيتان في الدائرة (ξ) و تحصران نفس القوس [AF]
إذن فهما متقايستان أي $M\hat{E}A = F\hat{B}M$

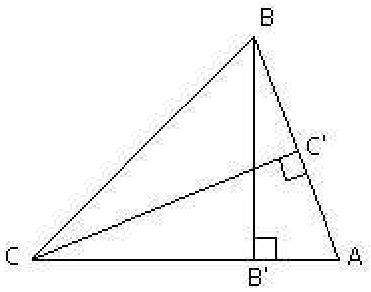
و بالتالي فالمثلث MAE و MBF متشابهان.
(حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الزوايا $[A\hat{M}E]$و $[M\hat{A}E]$ و $[A\hat{E}M]$ (في المثلث AME)
متناظرة على التوالي مع الزوايا $[F\hat{M}B]$ و $[M\hat{F}B]$ و $[M\hat{B}F]$ (في المثلث FMB)
و بالتالي الأضلاع [AM] و [AE] و [ME] متناظرة على التوالي مع الأضلاع [FM] و [BF] و [MB]
و منه $\frac{AM}{FM}=\frac{AE}{BF}=\frac{ME}{MB}$
و منه $\frac{MA}{MF}=\frac{ME}{MB}$



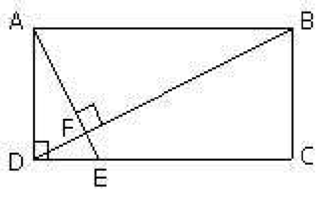
أي $MA\times MB=ME\times MF$ **(1)**
نفترض حالة $M\in[OE]$ (أنظر الشكل)
أي $ME=OE-OM$
و $MF=OF+OM$
و لدينا $OE=OF=r$ (لأن $E\in(\xi)$ و $F\in(\xi)$)
و بالتالي $ME\times MF=(OE-OM)(OF+OM)$
$= (r-OM)(r+OM)$
أي $ME\times MF=r^2-OM^2$ **(2)**
و من **(1)** و **(2)** نستنتج أن $ME\times MF = ME\times MF= r^2 - OM^2$
و نبين نفس النتيجة في حالة $M\in[OF]$

4) نعتبر المثلثين 'ACC و 'ABB (وذلك انطلاقا من الأطوال التي تتضمنها المتساوية $AC'\times AB=AB'\times AC$)



لدينا $[B\hat{A}C]$ زاوية مشتركة بين المثلثين
و $A\hat{B}'B=A\hat{C}'C$ (زاويتان قائمتان)
إذن المثلثان 'ACC و 'ABB متشابهان (حسب الحالة 1)
و منه أطوال الأضلاع المتناظرة (المرتبطة بالزوايا المتناظرة) متناسبة أي:
الضلعين [AB] و ['AB] المتناظرين مع الضلعين [AC] و ['AC] على التوالي متناسبة :
و منه $\frac{AB'}{AC'}=\frac{AB}{AC}$
و منه $AC'\times AB=AB'\times AC$

5) AB=2BC
أ) نبين أن المثلثين ADE و BCD متشابهان



لدينا $A\hat{D}E=90°$ $B\hat{C}D=90°$ أي $B\hat{C}D=A\hat{D}E$ (1)
نسمي F نقطة تقاطع (AE) و (BD)
المثلث DEF قائم الزاوية في F لأن (DF) و (AF) متعامدان
و منه الزاويتان $[F\hat{E}D]$ و $[B\hat{D}C]$ متتامتان (2)

و في المثلث BCD القائم الزاوية في C لدينا :

الزاويتان $[\hat{DBC}]$ و $[\hat{BDC}]$ متتامتان (3)

و من (2) و (3) نستنتج أن الزاويتين $[\hat{FED}]$ و $[\hat{DBC}]$ متقايستان أي $\hat{DBC} = \hat{FED}$ (4)

و من (1) و (4) نستنتج أن المثلثين ADE و BCD متشابهان (حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الأضلاع [AD] و [AE] و [DE] (في المثلث ADE)
متناظرة مع الأضلاع [DC] و [BD] و [BC] (في المثلث BCD) على التوالي

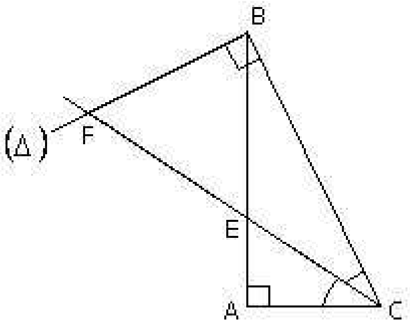
و بالتالي فهي متناسبة أي : $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DE}{BC}$

و لدينا AD=BC و DC=AB لأن ABCD مستطيل

و AB=2BC حسب المعطيات أي $BC = \dfrac{1}{2}AB$

أي $DE = BC.\dfrac{AD}{DC} \quad = \dfrac{1}{2}AB.\dfrac{BC}{AB} \quad = \dfrac{1}{2}BC \quad = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}AB) \quad = \dfrac{1}{4}AB$

و لدينا **AB=CD** إذن $DE = \dfrac{1}{4}CD$



6) 2 أ) نبين أن المثلثين AEC و BFC متشابهان

لدينا $\hat{ACE} = \hat{BCF}$ (1) لأن (CE] منصف الزاوية $[\hat{ACB}]$

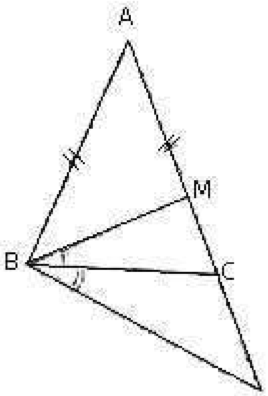
و $\hat{CAE} = 90°$ $\hat{CBF} = 90°$ أي $\hat{CAE} = \hat{CBF}$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين AEC و BFC متشابهان (حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الأضلاع [AE] و [AC] و [EC] (في المثلث AEC)
متناظرة مع الأضلاع [BF] و [BC] و [FC] (في المثلث BFC)

و بالتالي فأطوالها متناسبة أي : $\dfrac{EC}{FC} = \dfrac{AE}{BF}$

و منه AE×FC=EC×BF



7) أ) نقارن الزاويتين $[\hat{ABN}]$ و $[\hat{AMB}]$

لدينا $\hat{ABN} = \hat{ABC} + \hat{NBC}$ (1) (انظر الشكل)

و في المثلث MBC الزاوية $[\hat{AMB}]$ خارجية

ومنه $\hat{AMB} = \hat{MBC} + \hat{MCB}$

و لدينا $\hat{MCB} = \hat{ACB}$ (انظر الشكل)

و $M\hat{B}C = N\hat{B}C$ (حسب المعطيات)

إذن $A\hat{M}B = A\hat{C}B + N\hat{B}C$ (2)

$= A\hat{B}C + N\hat{B}C$

(لدينا $A\hat{C}B = A\hat{B}C$ لأن المثلث ABC متساوي الساقين في A)

من (1) و (2) نستنتج أن $A\hat{B}N = A\hat{M}B$

ب) نقارن المثلثين ABN و AMB و نستنتج أن $AB^2=AM\times AN$

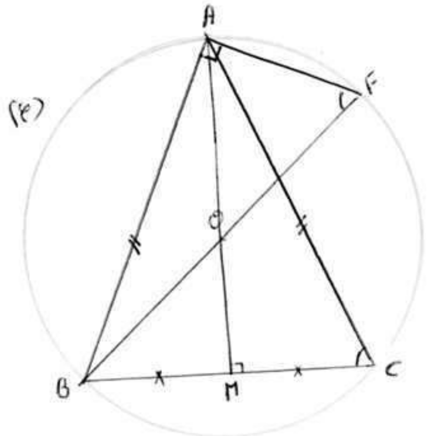
لدينا $A\hat{B}N = A\hat{M}B$ (حسب أ) و الزاوية $[B\hat{A}N]$ مشتركة

إذن المثلثان ABN و AMB متشابهان (حسب الحالة 1)

و بالتالي أطوال الأضلاع [AB] و [AN] (في المثلث ABN) المتناظرة

مع أطوال الأضلاع [AM] و [AB] (في المثلث AMB) على التوالي متناسبة

و منه $\frac{AN}{AB} = \frac{AB}{AM}$ أي $AB^2=AM\times AN$



8) أ) نبين أن المثلثين AFB و MCA متشابهان

لدينا M منتصف [BC] أي (AM) متوسط في المثلث ABC المتساوي

الساقين في A إذن (AM) هو كذلك واسط [BC] أي $A\hat{M}C = 90°$

و لدينا $B\hat{A}F = 90°$ لأن [BF] قطر في $\xi(O,R)$

أي المثلث ABF قائم الزاوية في A

إذن $A\hat{M}C = B\hat{A}F$ (1)

و الزاويتان $[A\hat{F}B]$ و $[B\hat{C}A]$ محيطيتان في الدائرة $\xi(O,R)$ و تحصران

نفس القوس [AB]

إذن $B\hat{C}A = A\hat{F}B$ (2)

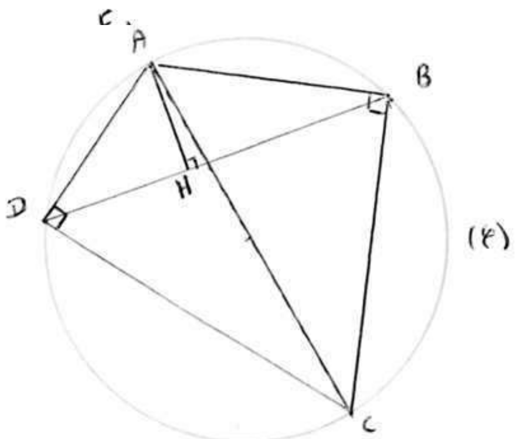
و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين AFB و MCA متشابهان (حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الضلعين [AB] و [AF] (في المثلث AFB) متناظرتان على التوالي

مع الضلعين [AM] و [MC] (في المثلث MCA)

و بالتالي أطوالها متناسبة أي $\frac{AF}{MC} = \frac{AB}{AM}$

أي $AB\times MC=AF\times AM$



9) نقارن المثلثين ABH و ACD :

لدينا [AC] قطر في الدائرة (ξ) و $D \in (\xi)$

إذن $A\hat{D}C = 90°$

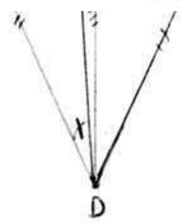
ولدينا $A\hat{H}B = 90°$ (1)

و الزاويتان $[A\hat{B}H]$ و $[A\hat{C}D]$ محيطيتان في الدائرة (ξ)

وتحصران نفس القوس [AD]

و منه $A\hat{B}H = A\hat{C}D$ (2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن المثلثين ABH و ACD متشابهان



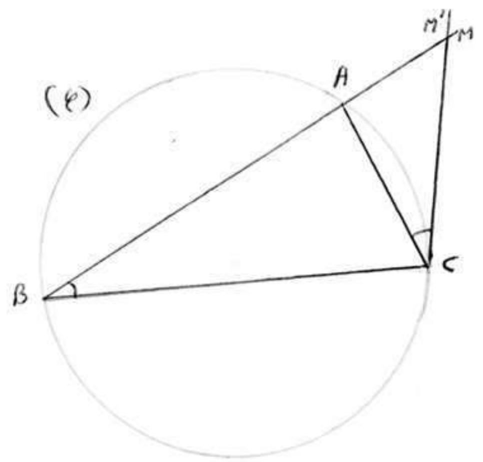
R

(حسب حالة 1)
و بالتالي الضلعان [AB] و [AH] (في المثلث ABH) المتناظران
على التوالي مع الضلعين [AC] و [AD] متناسبة
أي $\frac{AB}{AC}=\frac{AH}{AD}$ أي $AB\times AD=AC\times AH$

10) أ) نعتبر النقطة I منتصف [BC]
لدينا إذن I منتصف [AD] (لأن ABC متساوي الأضلاع أي (AI) محور تماثل للمثلث ABC)
إذن الرباعي ABDC متوازي الأضلاع و هو معين.
و بالتالي $E\hat{B}D=A\hat{C}D$ (1)
و لدينا (AC)//(BD) و (EF) قاطع
و بالتالي الزاويتان $[C\hat{F}D]$ و $[B\hat{D}E]$ المتبادلتان داخليا متقايستان أي : $B\hat{D}E=C\hat{F}D$ (2)
و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين BDE و CFD متشابهان (حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الضلعين [BD] و [BF]
(في المثلث ADE) متناظران على التوالي مع الضلعين [CF] و [CD] (في المثلث CFD)
و بالتالي $\frac{BD}{CF}=\frac{BE}{CD}$
أي $BE\times CF=CD\times BD$ و $CD\times BD$ ثابت (أي غير مرتبط ب E)
و بالتالي يضل الجداء $BE\times CF$ الجداء ثابتا عندما تتغير E على [AB]

11) نفترض
أ) نقارن المثلثين MAC و MBC
لدينا الزاوية $[A\hat{M}C]$ مشتركة بين المثلثين (1)
و لدينا $MA\times MB=MC^2$
أي $\frac{MA}{MC}=\frac{MC}{MB}$ (2)
من (1) و(2) نستنتج أن المثلثين MAC و MBC متشابهان (حسب الحالة 2)
وبما أن الضلعان [MA] و [MC]
(في المثلث MAC) متناظرة على التوالي مع الضلعين [MC] و [MB] (في المثلث MCB) فإن الزاويتين $[A\hat{C}M]$ و $[M\hat{B}C]$
المحاذيتين لكل من الضلعين متناظرتين وبالتالي متقايستان
(لأن $[M\hat{B}C]=[A\hat{B}C]$)
أي $A\hat{C}M=A\hat{B}C$



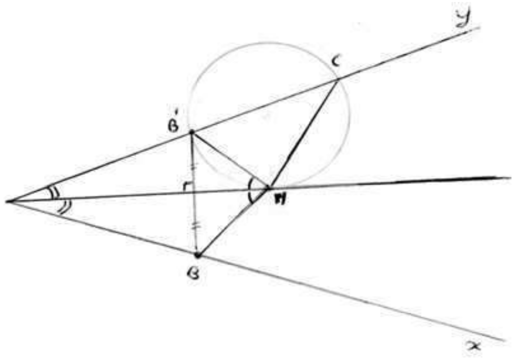
ب) في الدائرة (ع) المحيطة بالمثلث ABC
الزاوية $[A\hat{B}C]$ محيطية في الدائرة (ع) و تحصر القوس [AC]
و إذا افترضنا نقطة 'M من [BA) بحيث يكون ('CM) مماسا للدائرة (ع) في C فيكون لدينا $[A\hat{C}M']$ محيطية في (ع) و تحصر نفس القوس [AC]
و بالتالي $A\hat{B}C=A\hat{C}M'$

R

و حسب أ) $A\hat{B}C = A\hat{C}M$

و بالتالي $A\hat{C}M = A\hat{C}M'$ أي أن M'=M

و بالتالي المستقيم (CM) مماس للدائرة (ع) المحيطة بالمثلث ABC في النقطة C



12 ($AB = \frac{3}{4}AM$ و $AC = \frac{4}{3}AM$

أ) نقارن المثلثين ABM و AMC

لدينا $M\hat{A}B = M\hat{A}C$ (لأن (AM) منصف للزاوية $[x\hat{A}y]$ (1)

و $AB = \frac{3}{4}AM$ و $AC = \frac{4}{3}AM$

أي $\frac{AB}{AM} = \frac{3}{4}$ و $\frac{AC}{AM} = \frac{4}{3}$

أي $\frac{AB}{AM} = \frac{3}{4}$ و $\frac{AM}{AC} = \frac{3}{4}$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين ABM و AMC متشابهان (حسب الحالة 2)

ب) بالتماثل المحوري الذي محوره (AM) : $S_{(AM)}$

$S_{(AM)}$: A→A

$S_{(AM)}$: B→B'

أي $[A\hat{M}B] \to [A\hat{M}B']$

و بالتالي $A\hat{M}B = A\hat{M}B'$ (3)

ومن أ) نستنتج أن الزاوية $[A\hat{M}B]$ (في المثلث ABM) متناظرة مع الزاوية $[A\hat{C}M]$ (في المثلث AMC)

ومنه $A\hat{M}B = A\hat{C}M$ (4)

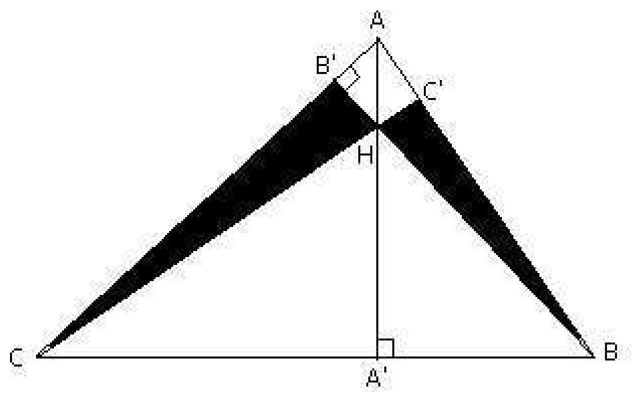
ومن (3) و (4) نستنتج أن $A\hat{M}B' = A\hat{C}M$

ومثل السؤال ب) من التمرين 11)

نستنتج أن الزاويتين $[A\hat{C}M]$ و $[A\hat{M}B']$ محيطيتان في

(ع) و تحصران نفس القوس [B'M] و أ، المستقيم (AM)

مماس للدائرة (ع) في M



13 (نثبت أن HA×HA'=HB×HB'=HC×HC'

نعتبر المثلثين AHB' و BHA'

R

لدينا $A\hat{B}'H = B\hat{A}'H = 90°$

و $A\hat{H}B' = B\hat{H}A'$ (لأن الزاويتين $[A\hat{H}B']$ و $[B\hat{H}A']$ متقابلتان بالرأس H)

و بالتالي فالمثلثان 'AHB و 'BHA متشابهان

و منه الأضلاع المتناظرة متناسبة أي :

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HB'}{HA'}$$

و منه $HA \times HA' = HB \times HB'$ (1)

نعتبر كذلك المثلثين 'BHC و 'CHB

لدينا $H\hat{B}'C = H\hat{C}'B = 90°$

و $B\hat{H}C' = B'\hat{H}C$ (لأن الزاويتين $[B'\hat{H}C]$ و $[B\hat{H}C']$ متقابلتان بالرأس H)

و بالتالي فالمثلثين 'BHC و 'CHB متشابهان ومنه الأضلاع المتناظرة متناسبة أي :

$$\frac{HB}{HC} = \frac{HC'}{HB'}$$

و منه $HB \times HB' = HC \times HC'$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن :

$HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$