

تمارين من فروض الهندسة الفضائية

تمرين 1 :

$ABCEFGH$ متوازي مستطيلات قائم ، بحيث $AE = 9 \text{ cm}$ و $EF = EH = 6 \text{ cm}$ و نقطة M من القطعة $[AE]$ نضع الهرم $AEFH$ بمستوى يوازي قاعدته ويمر من النقطة M فنحصل على هرم $AMPR$

$$V_2 = \frac{27}{4} \text{ cm}^3 \text{ حجمه}$$

(1) أحسب المسافة AH

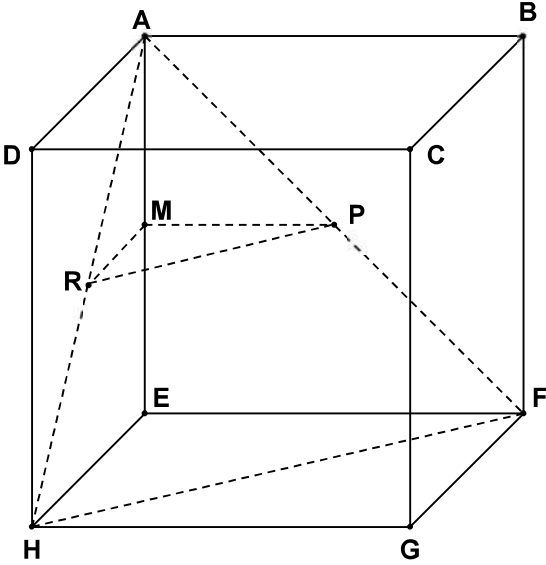
(2) بين أن حجم الهرم $AEFH$ هو $V_1 = 54 \text{ cm}^3$

(3) نعتبر أن الهرم $AMPR$ هو تصغير للهرم $AEFH$

أ - بين أن نسبة التصغير هي : $k = \frac{1}{2}$

ب - تحقق أن مساحة المثلث MPR هي : $S_2 = 4,5 \text{ cm}^2$

ج - بين أن M هي منتصف القطعة $[AE]$



تمرين 2 :

$SABCD$ هرم منتظم رأسه S وقاعدته المربع $ABCD$ الذي مركزه النقطة O حيث :

$BC = 4 \text{ cm}$ والارتفاع $SO = 6 \text{ cm}$

(1) أحسب حجم الهرم $SABCD$

(2) بين أن : $AC = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

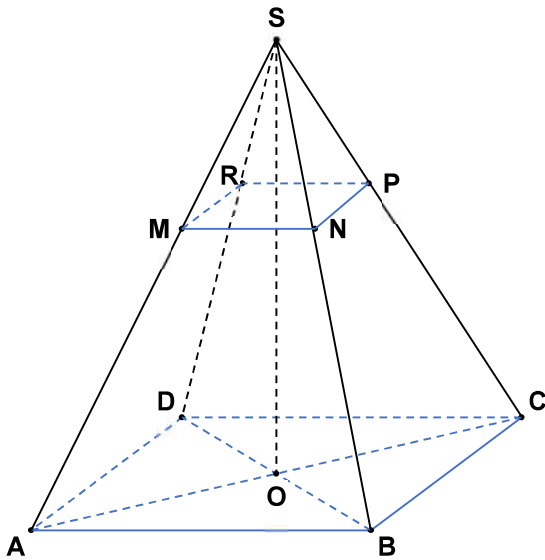
(3) نعتبر المستوى (NPR) الموازي للمستوى (BCD)

والمار من النقطة M بحيث $SM = \frac{1}{3}SA$

فنحصل على الهرم $SMNPR$ كتصغير للهرم $SABCD$

أ - بين أن : $MN = \frac{1}{3}AB$

ب - أحسب حجم الهرم $SMNPR$ ثم استنتج حجم الجسم $ABCDMNPR$



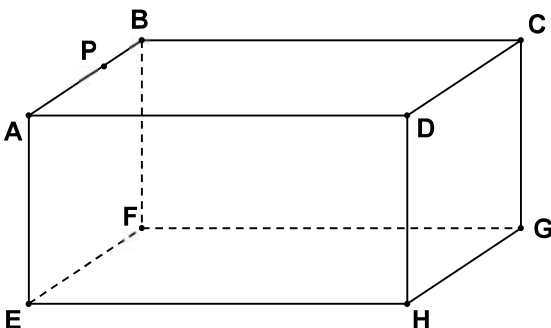
تمرين 3 :

$ABCEFGH$ متوازي مستطيلات بحيث : $AB = 8$ و $BC = 6$ و $AE = 3$ و النقطة P من القطعة $[AB]$ بحيث $AP = 6$ (أنظر الشكل)

(1) أ - بين أن : $DP = 6\sqrt{2}$

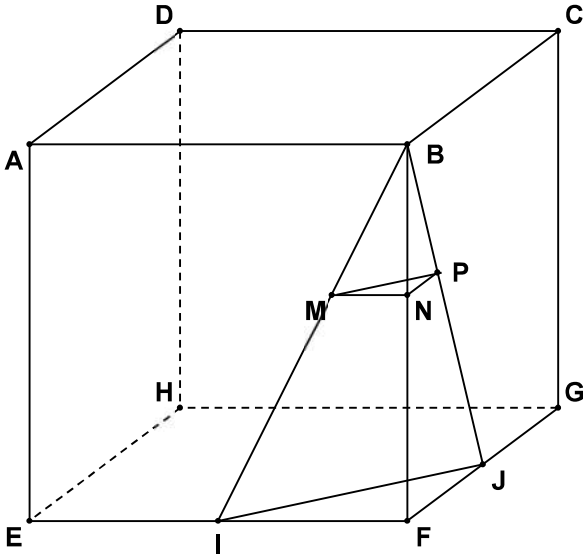
ب - أحسب المسافة PH

(2) أحسب الحجم $ABCEFGH$



تمرين 4 :

$AB = 6 \text{ cm}$ مكعب بحيث : نعتبر النقطة I منتصف $[EF]$ و النقطة J منتصف $[FG]$



1) أ - بين أن المثلث BFH قائم الزاوية في F

ب - أحسب المسافتين BH و FH

ج - بين أن حجم رباعي الأوجه $BIFJ$ هو : $V_1 = 9 \text{ cm}^3$

3) المجسم $BMNP$ تصغير للمجسم $BIFJ$

بحيث : $BM = \sqrt{5}$

أ - بين أن نسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

ب - استنتج حجم المجسم $BMNP$

تمرين 5 :

ليكن $SABC$ هرمًا قاعدته هي المثلث ABC القائم الزاوية في A

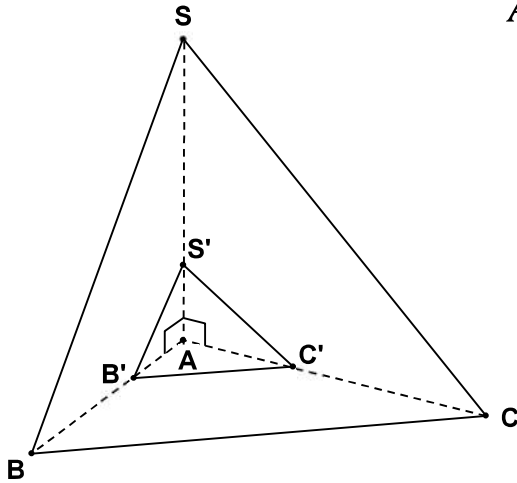
وارتفاعه $SA = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ بحيث $AS = AC = AB = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

1) بين أن حجم الهرم $SABC$ هو $V_1 = 4\sqrt{3} \text{ cm}^3$

2) ليكن $S'AB'C'$ تصغيرًا للهرم $SABC$ بنسبة $\frac{1}{3}$

أ - أحسب V_2 حجم الهرم $S'AB'C'$

ب - أحسب مساحة المثلث $AB'C'$



تمرين 6 :

في الشكل جانبه $ABCD A'B'C'D'$ مكعب بحيث $AB = 6 \text{ cm}$ والنقط P و Q و R تنتمي على التوالي

للقطع $[AB]$ و $[AD]$ و $[AA']$ وتحقق $AP = AQ = AR = 2 \text{ cm}$

1) أ - أحسب V حجم المكعب $ABCD A'B'C'D'$

ب - أحسب المسافة BD

ج - بين أن المستقيمين (PQ) و (BD) متوازيان

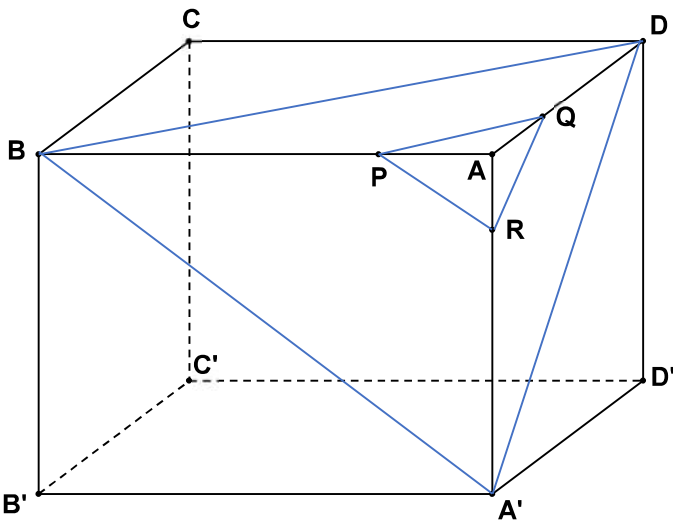
وأحسب النسبة $\frac{PQ}{BD}$

2) تأكد أن حجم الهرم $ABDA'$ هو $V_1 = 36 \text{ cm}^3$

3) نعتبر أن الهرم $APQR$ هو تصغير للهرم $ABDA'$

أ - تحقق أن نسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

ب - استنتج V_2 حجم الهرم $APQR$



حلول تمارين من فروض الهندسة الفضائية

تمرين 1 :

(1) أحسب المسافة AH

لدينا $(AE) \perp (AH)$

إذن المثلث AEH قائم الزاوية في E
إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن :

$$AH^2 = AE^2 + EH^2$$

$$AH^2 = 9^2 + 6^2$$

$$AH^2 = 81 + 36$$

$$AH^2 = 117$$

$$AH = \sqrt{117} = \sqrt{9 \times 13}$$

$$AH = 3\sqrt{13}$$

(2) بين أن حجم الهرم $AEFH$ هو $V_1 = 54 \text{ cm}^3$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times B \times AE \quad \text{لدينا}$$

لنحسب B مساحة القاعدة التي عبارة عن مثلث EFH
قائم الزاوية في E

$$B = \frac{EF \times EH}{2} = \frac{6 \times 6}{2} = 18 \quad \text{إذن مساحته هي}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times 18 \times 9 \quad \text{ومنه}$$

$$V_1 = 54 \text{ cm}^3$$

(3) أ - بين أن نسبة التصغير هي : $k = \frac{1}{2}$

$$V_2 = k^3 \times V_1 \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{27}{4} = k^3 \times 54$$

$$k^3 = \frac{27}{54} = \frac{27}{4} \times \frac{1}{54} = \frac{27}{216}$$

$$k^3 = \left(\frac{3}{6}\right)^3$$

$$k = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{إذن}$$

ب - تحقق أن مساحة المثلث MPR هي : $S_2 = 4,5 \text{ cm}^2$

$$S_2 = k^2 \times S_1 \quad \text{لدينا}$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 18 = \frac{1}{4} \times 18$$

$$S_2 = 4,5 \text{ cm}^2$$

ج - بين أن M هي منتصف القطعة $[AE]$

$$k = \frac{\text{ضلع من المجسم الصغير}}{\text{الضلع المناظر له في المجسم الكبير}} \quad \text{لدينا}$$

$$k = \frac{AM}{AE} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AM}{AE}$$

$$AM = \frac{1}{2} AE$$

ومنه M هي منتصف القطعة $[AE]$

تمرين 2 :

(1) أحسب حجم الهرم $SABCD$

$$V = \frac{1}{3} \times S_{ABCD} \times SO \quad \text{لدينا}$$

$$V = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 6 \quad \text{ومنه}$$

$$V = 32 \text{ cm}^3$$

(2) بين أن : $AC = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

المثلث ABC قائم الزاوية في B
إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 4^2 + 4^2$$

$$AC^2 = 16 + 16$$

$$AC^2 = 32$$

$$AC = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$$

$$AC = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$DP^2 = 36 + 36$$

$$DP^2 = 72$$

$$DP = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$$

$$DP = 6\sqrt{2}$$

ب - أحسب المسافة PH

لدينا (DH) عمودي على المستوى $(ABCD)$

إذن (DH) عمودي على جميع المستقيمات التي ضمن

المستوى $(ABCD)$ وبما أن (PD) توجد ضمنه

إذن $(DH) \perp (PD)$

إذن المثلث PDH قائم الزاوية في D

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن :

$$PH^2 = DP^2 + DH^2$$

$$PH^2 = (6\sqrt{2})^2 + 3^2$$

$$PH^2 = 72 + 9$$

$$PH^2 = 81$$

$$PH = \sqrt{81}$$

$$PH = 9$$

(2) أحسب الحجم $ABCDEFGH$

نعلم أن حجم مكعب أو متوازي مستطيلات هو :

$$V = \text{الإرتفاع} \times \text{العرض} \times \text{الطول}$$

$$V = EF \times EH \times AE \quad \text{إذن}$$

$$V = 8 \times 6 \times 3$$

$$V = 144 \text{ cm}^3$$

تمرين 4 :

(1) أ - بين أن المثلث BFH قائم الزاوية في F

لدينا $BFGC$ مربع إذن : $(BF) \perp (FG)$

لدينا $ABFE$ مربع إذن : $(BF) \perp (EF)$

(3) أ - بين أن : $MN = \frac{1}{3}AB$

في المثلث SAB لدينا :

$(MN) \parallel (AB)$ حيث $N \in [SB]$ و $M \in [SA]$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن :

$$\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{MN}{AB}$$

$$\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \quad \text{إذن} \quad SM = \frac{1}{3}SA \quad \text{ولدينا}$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{1}{3} \quad \text{إذن}$$

$$MN = \frac{1}{3}AB \quad \text{وبالتالي}$$

ب -

➤ أحسب حجم الهرم $SMNPR$

$$V' = k^3 \times V \quad \text{لدينا}$$

$$k = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \quad \text{ولدينا}$$

$$V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 32 = \frac{1}{27} \times 32 = \frac{32}{27}$$

$$V' = 1,18 \text{ cm}^3$$

إذن حجم الهرم $SMNPR$ هو : $V' = 1,18 \text{ cm}^3$

➤ استنتج حجم المجسم $ABCDMNPR$

$$V'' = V - V' = 32 - 1,18 \quad \text{لدينا}$$

$$V'' = 30,81 \text{ cm}^3 \quad \text{إذن}$$

تمرين 3 :

(1) أ - بين أن : $DP = 6\sqrt{2}$

لدينا المثلث ADP قائم الزاوية في A
إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن :

$$DP^2 = AP^2 + AD^2$$

$$DP^2 = 6^2 + 6^2$$

لدينا $BIFJ$ عبارة عن هرم ارتفاعه BF وقاعدته المثلث IFJ القائم الزاوية في F إذن :

$$V_1 = \frac{1}{3} \times S_{IFJ} \times BF \quad \text{لدينا}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times 6 \quad \text{ومنه}$$

$$V_1 = 9 \text{ cm}^3$$

(3) أ - بين أن نسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

$$k = \frac{BM}{BI} \quad \text{لدينا}$$

لنحسب BI :

لدينا المثلث BFI قائم الزاوية في F إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن :

$$BI^2 = BF^2 + FI^2$$

$$BI^2 = 6^2 + 3^2$$

$$BI^2 = 36 + 9$$

$$BI^2 = 45$$

$$BI = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5}$$

$$BI = 3\sqrt{5}$$

$$k = \frac{BM}{BI} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \quad \text{إذن}$$

ب - استنتج حجم الجسم $BMNP$

$$V_2 = k^3 \times V_1 \quad \text{لدينا}$$

$$V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 9 = \frac{9}{27} = \frac{9 \times 1}{9 \times 3}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \text{ cm}^3$$

تمرين 5 :

(1) بين أن حجم الهرم $SABC$ هو $4\sqrt{3} \text{ cm}^3$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times SA \quad \text{لدينا}$$

ولدينا المستقيمين (EF) و (FG) متقاطعين في F ويوجدان ضمن المستوى $(EFGH)$

إذن $(BF) \perp (EFGH)$ ومنه المستقيم (BF) عمودي على جميع المستقيمات التي ضمن المستوى $(EFGH)$ وبما أن (FH) يوجد ضمن $(EFGH)$ إذن $(BF) \perp (FH)$

وبالتالي المثلث BFH قائم الزاوية في F

ب - أحسب المسافتين BH و FH

➤ نحسب المسافة FH :

لدينا المثلث EFH قائم الزاوية في E إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن :

$$FH^2 = EH^2 + EF^2$$

$$FH^2 = 6^2 + 6^2$$

$$FH^2 = 36 + 36$$

$$FH^2 = 72$$

$$FH = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$$

$$FH = 6\sqrt{2}$$

➤ نحسب المسافة BH :

لدينا المثلث BFH قائم الزاوية في F إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن :

$$BH^2 = BF^2 + FH^2$$

$$BH^2 = 6^2 + (6\sqrt{2})^2$$

$$BH^2 = 36 + 72$$

$$BH^2 = 108$$

$$BH = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3}$$

$$BH = 6\sqrt{3}$$

ج - بين أن حجم رباعي الأوجه $BIFJ$ هو: $V_1 = 9 \text{ cm}^3$

ج - بين أن المستقيمين (PQ) و (BD) متوازيان
لدينا في المثلث ABD :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AQ}{AD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AD} \quad \text{إذن}$$

وبما أن النقط A و P و B في نفس ترتيب النقط
A و Q و D إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن :

$$(BD) // (PQ)$$

أحسب النسبة $\frac{PQ}{BD}$
في المثلث ABD لدينا :

(BD) // (PQ) حيث $Q \in [AD]$ و $P \in [AB]$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AD} = \frac{PQ}{BD}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{PQ}{BD} = \frac{1}{3} \quad \text{إذن}$$

(2) تأكد أن حجم الهرم $ABDA'$ هو 36 cm^3

لدينا $ABDA'$ عبارة عن هرم ارتفاعه AA' وقاعدته
المثلث ABD القائم الزاوية في A إذن :

$$V_1 = \frac{1}{3} \times S_{ABD} \times AA' \quad \text{لدينا}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AD}{2} \times AA' \quad \text{ومنه}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 6}{2} \times 6$$

$$V_1 = 36 \text{ cm}^3$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} \quad \text{ومنه}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times 6 \times 2\sqrt{3}$$

$$V_1 = 4\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

(2) أ - أحسب V_2 حجم الهرم $S'AB'C'$

$$V_2 = k^3 \times V_1 \quad \text{لدينا}$$

$$V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 4\sqrt{3} = \frac{1}{27} \times 4\sqrt{3}$$

$$V_2 = \frac{4\sqrt{3}}{27} \text{ cm}^3$$

ب - أحسب مساحة المثلث $AB'C'$

$$S' = k^2 \times S_{ABC} \quad \text{لدينا}$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 6 = \frac{1}{9} \times 6 = \frac{6}{9}$$

$$S_2 = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

تمرين 6 :

(1) أ - أحسب V حجم المكعب $ABCD A'B'C'D'$

$$V = AB \times AD \times AA' \quad \text{إذن}$$

$$V = AB^3$$

$$V = 6^3$$

$$V = 216 \text{ cm}^3$$

ب - أحسب المسافة BD

لدينا المثلث ABD قائم الزاوية في A

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD^2 = 6^2 + 6^2$$

$$BD^2 = 36 + 36$$

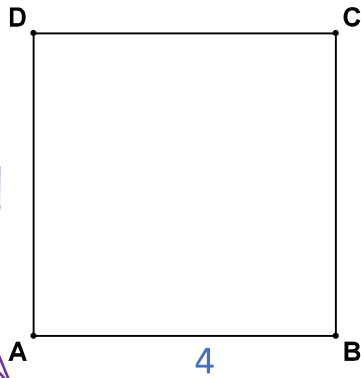
$$BD^2 = 72$$

$$BD = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$$

$$BD = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

قواعد هامة :

مساحة المربع $ABCD$ هي :

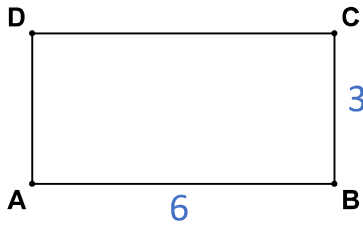


في المربع
الطول = العرض

$$S_{ABCD} = \text{الطول} \times \text{العرض} = AB \times BC$$

$$S_{ABCD} = 4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$$

مساحة المستطيل $ABCD$ هي :

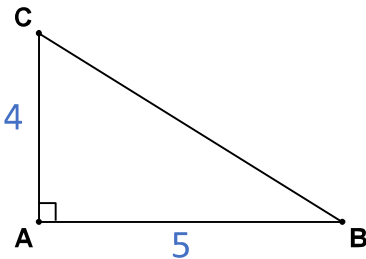


$$S_{ABCD} = \text{الطول} \times \text{العرض} = AB \times BC$$

$$S_{ABCD} = 6 \times 3 = 18 \text{ cm}^2$$

وحدة المساحة هي :
 cm^2

مساحة المثلث القائم الزاوية في A هي :



$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ cm}^2$$

(3) أ - تحقق أن نسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

$$k = \frac{AP}{AA'} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{لدينا}$$

ب - استنتج حجم الهرم $APQR$

$$V_2 = k^3 \times V_1 \quad \text{لدينا}$$

$$V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 36 = \frac{1}{27} \times 36 = \frac{36}{27} = \frac{9 \times 4}{9 \times 3}$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \text{ cm}^3$$