الدرس السادس عشر

معادلة مستقيم

ملخـــــــــــــــــــص الـــــــــــــدرس

- المعادلة المختصرة لمستقيم (D) هي $y = m x + p$

بحيث m هو المعامل الموجه للمستقيم (D)

p هو الأرتوب عند الأصل

خاصية 1

- إذا كانت $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ نقطتين مختلفتين من المستقيم (D)

ذو المعادلة $y = m x + p$ فإن : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

خاصية 2

- إذا كانت $(D) : y = m x + p$ و $(D') : y = m' x + p'$
- إذا كان $m = m'$ فإن $(D) \parallel (D')$
- إذا كان $(D) \parallel (D')$ فإن $m = m'$
- إذا كان $m \times m' = -1$ فإن $(D) \perp (D')$
- إذا كان $(D) \perp (D')$ فإن $m \times m' = -1$

التماريـــــــــــــــــــــــن :

التمرين الأول :

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o , \vec{i} , \vec{j})$

نعتبر النقطتين $A(-1 , -3)$ و $B(2 , 3)$

1- أوجد معادلة المستقيم (AB)

2- لتكن $C(b-1 , 1)$ نقطة من المستوى .

حدد قيمةالعدد b علما أن النقط A و B و C مستقيمية

3- (Δ_1) مستقيم معادلته $4x - 2y + 3 = 0$ بين أن : $(AB) \parallel (\Delta_1)$

4- (Δ_2) مستقيم معادلته $y = (2m - 1)x + 3$

حدد قيمة m علما أن $(AB) \perp (\Delta_2)$

التمرين الثاني :

نعتبر المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 3x + 2$

E المسقط العمودي للنقطة o على (Δ)

1- حدد معادلة المستقيم (oE)

2- نعتبر (Δ') المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$

النقطة $H(x_H , y_H)$ المسقط العمودي للنقطة o على (Δ')

بين أن $x_H = \frac{-a\,b}{a^2+1}$; $y_H = \frac{b}{a^2+1}$ و $oH^2 = \frac{b^2}{a^2+1}$

التمرين الثالث :

لتكن $A(-2 , 1)$ و $B(3 , 1)$

1- حدد تقاطع المستقيم (AB) و محور الأفاصيل

2- حدد تقاطع المستقيم (AB) و محور الأراتيب

3- ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = + ax + 3$

حدد قيمة a بحيث (Δ) يقطع محور الأفاصيل في $D(1 , 2)$

التمرين الرابع :

نعتبر النقطتين $A(2\alpha , 7)$ و $B(-6 , 9)$

بحيث معادلة المستقيم (AB) هي $x + 2y - 18 = 0$

1- حدد قيمة α

2- حدد معادلة (Δ) واسط القطعة $[AB]$

3- أحسب الطول AB

4- لتكن $E(-3 , 2)$ حدد إحداثيتي النقطة M بحيث يكون الرباعي$ABME$ متوازي الأضلاع.

التمرين الخامس :

لتكن $A(-6 , -8)$; $B(-8 , -4)$

1- حدد تقاطع المستقيم (AB) وكلا من محور الأفاصيل و محور الأراتيب

2- بين أن المثلث oAB قائم الزاوية

3- لتكن ζ الدائرة المحيطة بالمثلث oAB

حدد مركز و شعاع الدائرة ζ

4- حدد معادلة المستقيم المماس للدائرة ζ في I

حـــــــــــــل تمـــاريــــن معادلــــــــــة مستقيـــــــــم

حل التمرين الأول:

1- لتكن معادلة (AB) : $y = a x + b$ مع a و b عددين حقيقين يجب تحديدهما

$A(-1, -3) \in (AB) \Longrightarrow$ (1) $-3 = -a + b$

$B(2, 3) \in (AB) \Longrightarrow$ (2) $3 = 2a + 3$

$(2) - (1) \Longrightarrow 6 = 3a \Longrightarrow a = 2 \Longrightarrow b = 3 - 4 = -1$

إذن $\boxed{y = 2x - 1}$ هي معادلة المستقيم (AB)

2- A و B و C مستقيمية إذن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (AB)

إذن تحقق معادلة المستقيم (AB)

$1 = 2(b - 1) - 1$

$1 = 2b - 2 - 1$

$2b = 4 \Longrightarrow b = 2$

3- لدينا $4x - 2y + 3 = 0$

إذن $2y = 4x + 3$ أو $y = 2x + \frac{3}{2}$

بما أن للمستقيم (Δ_1) و (AB) نفس المعامل الموجه فإن : $(\Delta_1) /\!/ (AB)$

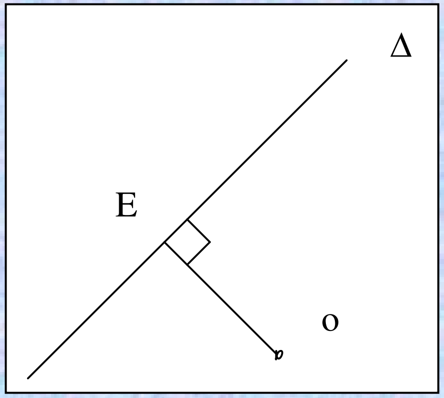
4- $(AB) \perp \Delta_2$ إذن : $(2m - 1) \times 2 = -1$

$2m - 1 = \frac{-1}{2} \Longrightarrow 2m = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow m = \frac{1}{4}$

حل التمرين الثاني:

1- لتكن $y = ax + b$ معادلة المستقيم (oE)



لدينا $o(0, 0)$ تنتمي إلى (oE)

إحداثيات o تحقق المعادلة إذ: $0 = a \times 0 + b$

إذن $b = 0$

من جهة آخرى $(oE) \perp (\Delta)$

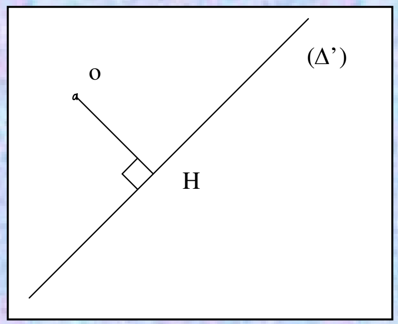
إذن $3 \times a = -1$

$a = \frac{-1}{3}$

و بالتالي معادلة المستقيم (oE) هي : $y = \frac{-1}{3}x$

2- رسم الشكليعطي أفكار جيدة من أجل انجاز التمرين

$y = \alpha x + \beta$ معادلة المستقيم (oH)



$o \in (oH) \Longrightarrow 0 = \alpha \times 0 + \beta$ إذن $\beta = 0$

$H(x_H , y_H) \in (oH) \Longrightarrow y_H = \alpha \times x_H$ إذن $\alpha = \frac{y_H}{x_H}$

و بالتالي معادلة $(oH) : y = \frac{y_H}{x_H} x$

لدينا $(\Delta') \perp (oH)$ إذن $\frac{y_H}{x_H} \times a = -1$ (1) إذن $\boxed{-y_H \times a = x_H}$ (1)

من جهة أخرى $H(x_H , y_H) \in (\Delta') \Longrightarrow \boxed{y_H = a x_H + b}$ (2)

نعوض قيمة x_H في (1) و في العلاقة (2) <==

$$y_H = a(-y_H \times a) + b$$

$$= -a^2 y_H + b$$

$$(1 + a^2) y_H = b$$

و بالتالي

$$y_H = \frac{b}{1 + a^2}$$

و نستنتج أن

$$x_H = -a y_H = \frac{-ab}{1 + a^2}$$

من جهة أخرى لدينا

$$oH^2 = x_H^2 + y_H^2$$

$$= \frac{a^2 b^2}{(1 + a^2)^2} + \frac{b^2}{(1 + a^2)^2}$$

$$= \frac{(a^2 + 1) b^2}{(a^2 + 1)^2} = \frac{b^2}{a^2 + 1}$$

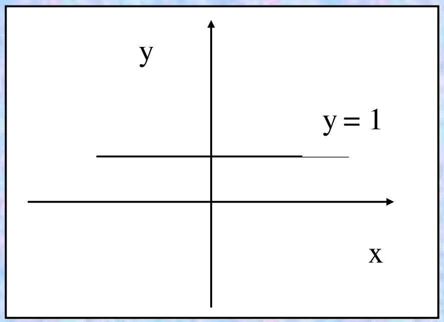
حل التمرين الثالث:

1- تقاطع المستقيم AB و محور الأفاصيل

لتكن $y = mx + p$ معادلة المستقيم (AB)

المعامل الموجه للمستقيم (AB) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 1}{5} = 0$

إذن $y = p$ و لدينا $A \in (AB)$ إذن $1 = p$ و بالتالي :



معادلة المستقيم (AB) : $y = 1$

معادلة محور الأفاصيل هي : $y = 0$

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

ليس لهذه النظمة حل لأن $1 \neq 0$

2- معادلة محور الأراتيب هي $x = 0$

معادلة المستقيم (AB) هي $y = 1$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

و بالتالي نقطة التقاطع هي $C(0 , 1)$

و يمكن ملاحظ ذلك أيضا من خلال الشكل

-3

معادلة (Δ) هي $y = ax + 3$

معادلة محولر الأفاصيل هي $y = 0$

$$\begin{cases} y = ax + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

تقاطع المستقيمين هو حل النظمة إذن

$ax + 3 = 0$

$a = \frac{-3}{x}$

بما أن نقطة التقاطع هي $D\,(1\,,\,2)$ إذن $a = \frac{-3}{1} = -3$

حل التمرين الرابع:

-1 $A\,(2\alpha, 7)$ نقطة من المستقيم إذن $2\alpha + 2 \times 7 - 18 = 0$

$2\alpha = 4 \implies \alpha = 2$

-2 لدينا : $y = \frac{-1}{2}x + 9$ معادلة (AB)

لتكن $y = mx + p$ معادلة (Δ) لدينا $(AB) \perp (\Delta)$ إذن

$mx - \frac{1}{2} = -1$ إذن : $m = 2$

من جهة آخرى (Δ) عمودي على $[AB]$ في النقطة I

I هي منتصف $[AB]$: $I(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$ و $A((4\,,\,7)$ و $B(-6\,,\,9)$

أي $I\,(-1\,,\,8)$ لدينا $I \in (\Delta)$ إذن $y' = a'x + p$

نعوض إحداثيات I في المعادلة : $8 = -2 + p$

إذن $p = 10$

و بالتالي معادلة (Δ) هي $y = 2x + 10$

-3

$AB = \sqrt{(-6-4)^2 + (9-7)^2}$

$= \sqrt{100 + 4}$

$= \sqrt{104}$

-4

لتكن $M\,(x\,,\,y)$ و ABME متوازي الأضلاع إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EM}$

لدينا $\overrightarrow{AB}\,(-10\,,\,2)$ و $\overrightarrow{EM}\,(x+3\,,\,y-2)$

إذن $x + 3 = -10$ و $y - 2 = 2$

إذن $x = -13$ و $y = 4$

و بالتالي : $M\,(-13\,,\,4)$

حل التمرين الخامس:

-1 لدينا $A\,(-6\,,\,-8)$ و $B\,(-8\,,\,-4)$

معادلة المستقيم (AB) : $y = mx + p$

$m = \frac{-4+8}{-8+6} = \frac{4}{-2} = -2$

ثم نعوض إحداثيات A أو B في المستقيم (AB) إذن :

$-8 = 2 \times -6 + p \implies p = 4$

إذن $y = -2x + 4$ معادلة (AB)

- تقاطع(AB) مع محور الأفاصيل $(y = 0)$ هي حل النظمة

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Longleftarrow \quad -2x + 4 = 0 \quad \Longleftarrow \quad x = 2$$

إذن : نقطة التقاطع هي $E\ (2\ ,\ 0)$

• تقاطع(AB) مع محور الأراتيب $(x = 0)$ هو حل النظمة :

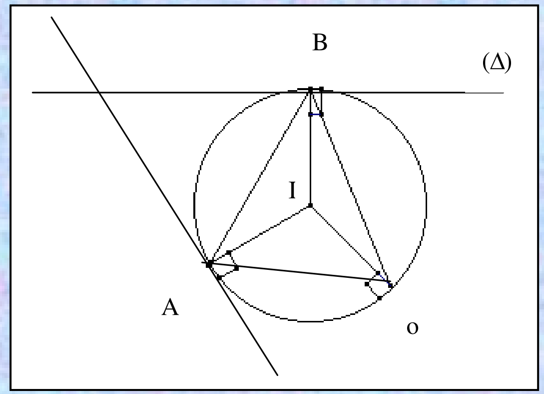
$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

إذن $y = -2 \times 0 + 4$

إذن $y = 4$

إذن نقطة التقاطع هي $F\ (0\ ,\ 4)$

-2



$$oA = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{36 + 64}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

$$AB = \sqrt{(-8 + 6)^2 + (-4 + 8)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 16}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

$$oB = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

لدينا $oB < oA$ و $AB < oA$ إذن: $oB^2 + AB^2 = 80 + 20 = 100 = oA^2$

و بالتالي oAB قائم الزاوية في B

3- لتكن النقطة $I\ (\alpha\ ,\ \beta)$ مركز الدائرة ζ

إذن $Io = IA = IB$ أو $Io^2 = IB^2$

$$Io^2 = IB^2$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + 8)^2 + (8 + 4)^2$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + 16\alpha + 64 + \beta^2 + 8\beta + 16$$
$$16\alpha + 8\beta + 80 = 0$$
$$(1) \quad \boxed{2\alpha + \beta + 10 = 0}$$

$$Io^2 = IA^2$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + 6)^2 + (\beta + 8)^2$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + 12\alpha + 36 + \beta^2 + 16\beta + 64$$
$$12\alpha + 16\beta + 100 = 0$$

$$(2) \quad 3\alpha + 4\beta + 25 = 0$$

و بالتالي نحصل غلى النظمة :

$$\begin{array}{l} \times 3 \\ \times 2 \end{array} \begin{cases} 2\alpha + \beta = -10 \\ 3\alpha + 4\beta = -25 \end{cases}$$

حل النظمة
$$\begin{cases} 6\alpha + 3\beta = -30 \\ 6\alpha + 8\beta = -50 \end{cases}$$

يعني $5\beta = -20 \Longrightarrow \beta = -4$

إذن $2\alpha = -6 \Longrightarrow \alpha = -3$

و بالتالي $I(-3\ ,\ -4)$

و بالتالي $I(-3\ ,\ -4)$ و الشعاع $r = Io = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

إذن $\zeta\ ((I(-3\ ,\ -4)\ ,\ 5)$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث oAB

4- ليكن المستقيم (Δ) مماس الدائرة ζ فيB $y = mx + p$

معادلة المستقيم (BI) : $y = ax + b$

حل النظمة

$$a = \frac{y_B - y_I}{x_B - x_I} = \frac{-4+3}{-8+4} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$B \in (BI)$ إذن $-4 = \frac{1}{4} \times -8 + b \Longrightarrow b = -2$

إذن المعادلة $(BI)\ :\ y = \frac{1}{4}x - 2$

لدينا (Δ) مماس للدائرة (ζ) إذن : (Δ) عمودي على الشعاع (IB)

إذن $m \times \frac{1}{4} = -1 \Longrightarrow m = -4$

و بما أن $B \in (\Delta)$ إذن نعوض إحداثيات B في معادلة $(\Delta) : y = -4x + b$

$-4 = -4 \times (-8) + b$

$\Longrightarrow b = -36$

و بالتالي معادلة المستقيم (Δ) هي $\boxed{y = -4x - 36}$