الدرس السابع

نظمة معادلتين

ملخـــــــــــــــــــــص الـــــــــــــــــدرس

- إذا كانت النظمة تؤول إلى حل وحيد (x_0 , y_0) فإن $S = \{ x_0 , y_0 \}$
- إذا كانت النظمة تؤول إلى نفس المعادلة $a x + b y + c = 0$ فإن مجموعة الحلول هي هذا المستقيم
- إذا كانت النظمة تؤول عند حلها إلى شيء مستحيل (مثال $0 x + 0 y = 1$) فإنه ليس للنظمة حل

التماريـــــــــــــــــــــــــــــــن :

التمرين الأول :

حل النظمات التالية

$$\begin{cases} x + 2 y = 2 \\ 0,5 x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = - 1 \\ 2 x - 2 y = - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = - 3 \\ 5 + 2 x = 3 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 - y^2 = - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x + 3}{y + 5} = 3 \\ \dfrac{x + 1}{y - 3} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

التمرين الثاني :

1- حل النظمة التالية

$$\begin{cases} 3 x + y = 115 \\ 2 x - 3 y = - 70 \end{cases}$$

2- استنتج حلول النظمة

$$\begin{cases} 3 x^2 + y^2 = 115 \\ 2 x^2 - 3 y^2 = - 70 \end{cases}$$

التمرين الثالث :

لتكن النظمة S مع a و b عددان حقيقيان

$$S\begin{cases} m\,x + y = 1 \\ x + m\,y = 1 \end{cases}$$

1- حدد حلول النظمة (S) حسب قيم البارامتر m

2- استنتج حلول النظمة

$$\begin{cases} m\,(x + y) + (x + y) = 1 \\ x + y + m\,(x + y) = 1 \end{cases}$$

التمرين الرابع :

ليكن n و p عددين صحيحين طبيعيين بحيث :

$$4^n + 65 = p^2$$

1- نضع $x = 2^n$ و $y = p$

بين

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 65 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} y - x = 5 \\ y + x = 13 \end{cases}$$

2- استنتج قيم n و p

التمرين الخامس :

1- بين أن $x^2 - 6\,x + 7 = (x - 3)^2$

2- حل المعادلة $x^2 - 6\,x + 7 = 0$

3- استنتج حلول النظمة

$$\begin{cases} A + B = 6 \\ A^2 + B^2 = 22 \end{cases}$$

التمرين السادس :

نعتبر المعادلة $(E)\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{3} - 1$

بحيث $x \geq 0$

نضع $U = \sqrt{x+1}$ و $V = \sqrt{x-1}$

1- بين أنه إذا كان x حل للمعادلة (E) فإن الزوج (U , V) حلا للنظمة (S)

$$(S) : \begin{cases} U + V = \sqrt{3} + 1 \\ U - V = \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

2- حل النظمة (S)

3- استنتج حلول المعادلة (E)

1- حل النظمة التالية

$$\begin{cases} x + y = 43 \\ 2x + 5y = 164 \end{cases}$$

2- يتوفر شخص على 1640 د مكونة من 43 ورقة نقدية، إحداها مكونة من 20 د و الأخرى من فئة 50 درهم

حدد عدد الأوراق من كل فئة

حـــــــــــــــــــل تماريــــــــــن نظمـــــة معادلتيـــــــــن

حل التمرين الأول:

☜

$$\begin{cases} x + 2y = 2 & (1) \\ 0,5x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) في 2- نحصل على

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x - 2y = -2 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نحصل على $0x + 0y = 0$

و بالتالي جميع القيم التي يمكن أن تأخذها x و y هي حلول للمعادلة

و بذلك هناك مالا نهاية له من الحلول

☜

$$\begin{cases} x - y = -1 & (1) \\ 2x - 2y = -5 & (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) في 2- نحصل على

$$\begin{cases} -2x + 2y = +2 \\ 2x - 2y = -5 \end{cases}$$

نجمعالمعادلتين $0x + 0y = -3$

و هذا غير ممكن لأن $0 \neq -3$

و بالتالي لا يوجد هناك حل $S = \phi$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = -3 & (1) \\ 5 + 2x = 3y & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y & (1) \\ 5 + 2x = 3y & (2) \end{cases}$$

بتعويض قيمة x في المعادلة (2) نحصل على :

$5 + 2(-3y) = 3y$

$9y = 5$

يعني $y = \dfrac{5}{9}$

إذن $x = -3 \times \dfrac{5}{9} = \dfrac{-5}{3}$

النظمة لها حل وحيد و هو الزوج

$S = (-\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{9})$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 - y^2 = -3 \end{cases}$$

لدينا $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 3(x - y) = -3$

إذن
$$\begin{cases} x - y = -1 & (1) \\ x + y = 3 & (2) \end{cases}$$
و

لدينا $x = -1 + y$ نعوضها في العادلة (2)

$-1 + y + y = 3 \implies 2y = 4 \implies y = 2$

إذن $x = -1 + 2$

$S = (1, 2)$

$$\begin{cases} \dfrac{x + 3}{y + 5} = 3 \\ \dfrac{x + 1}{y - 3} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

إذن

$$\begin{cases} x + 3 = 3(y + 5) = 3y + 15 \\ 2(x + 1) = 1(y - 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 - 3y - 15 = 0 \\ 2x + 2 - y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 12 & (1) \\ 2x - y = -5 & (2) \end{cases}$$

حسب (1) لدينا $x = 3y + 12$ إذنبتعويضها في (2)

$$2(3y + 12) - y = -5$$

$$6y - y + 24 = -5$$

$$5y = -29$$

$$y = \frac{-29}{5}$$

إذن

$$x = 3\left(\frac{-29}{5}\right) + 12 = \frac{-87}{5} + 12$$

$$x = \frac{-27}{5}$$

إذن

$$S = \left(\frac{-27}{5}, \frac{-29}{5}\right)$$

<u>**حل التمرين الثاني**</u>

-1

$$(E)\begin{cases} 3x + y = 115 & (1) \\ 2x - 3y = -70 & (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) في 2 و المعادلة (2) - 3

نحصل

$$\begin{cases} 6x + 2y = 230 \\ -6x + 9y = 210 \end{cases}$$

المجموع يعطي $11y = 440$

$$y = \frac{440}{11} = 40$$

إذن نعوض قيمة y في المعادلة (1)

$$3x = 115 - y = 75$$

$$x = \frac{75}{3} = 25$$

إذن

$$S = (25, 40)$$

2- حلول النظمة

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 115 \\ 2x^2 - 3y^2 = -70 \end{cases}$$

لاحظ أن للنظمتين نفس المعاملات في المعادلتين

لذلك نضع $X = x^2$ و $Y = y^2$ نحصل على النظمة الجديدة

$$(E)\begin{cases} 3X + Y = 115 \\ 2X - 3Y = -70 \end{cases}$$

حسب السؤال (1) لدينا $X = 25$ و $Y = 40$

لأن $(25 , 40)$ هو حل النظمة

و بالتالي $x^2 = X = 25$ و $y^2 = Y = 40$

إذن $x = -5$ أو $x = 5$ و $y = 2\sqrt{5}$ أو $y = -2\sqrt{5}$

و بالتالي مجموعة الحلول هي :

$$S = \{(-5 , 2\sqrt{5}) ; (-5 , -2\sqrt{5}) ; (5 , 2\sqrt{5}) ; (5 , -2\sqrt{5})$$

حل التمرين الثالث:

☜ $m \in IN$

$$\begin{cases} m x + y = 1 & (1) \\ x + m y = 1 & (2) \end{cases}$$

من خلال المعادلة (2) لدينا $x = 1 - m y$ ثم نعوض في المعادلة (1) نحصل على

$$m (1 - m y) + y = 1$$

$$m - m^2 y + y = 1$$

$$(1 - m^2) y = 1 - m$$

- إذا كان $1 - m^2 \neq 0$ فإن $y = \dfrac{1 - m}{1 - m^2}$

$$= \frac{1 - m}{(1 - m)(1 + m)} = \frac{1}{1 + m}$$

$$x = 1 - m \left(\frac{1}{1 + m}\right)$$

$$= \frac{1 + m - m}{1 + m}$$

$$= \frac{1}{1 + m}$$

إذن مجموعة الحلول هي $S = \{(\frac{1}{1 + m} , \frac{1}{1 + m}) , m \in IN \}$

☜ إذا كان $1 - m^2 = 0$ و منه $m^2 = 1$ إذن $m = -1$ أو $m = 1$

أ – إذا كان $m = 1$ فإن النظمة تصبح :

$$\begin{cases} - x + y = 1 & (3) \\ x - y = 1 & (4) \end{cases}$$

$(3) + (4)$ تعطي $2 = 0$ و هذا غير ممكن إذن $S = \phi$

ب – إذا كان $m = 1$ فإن النظمة تصبح

$$\begin{cases} x + y = 1 & (5) \\ x + y = 1 & (6) \end{cases}$$

$(5) - (6)$ تعطي $0 . x + 0 . y = 0$ و بالتاليتوجد ما لانهاية له من الحلول

$$S = \{ (x , y) ; x + y = 1\}$$

أي المستقيم الذي معالة $x + y = 1$

حل التمرين الرابع:

$4^n + 65 = p^2$

لدينا $y^2 - x^2 = p^2 - (2^n)^2 = p^2 - 2^{2n}$

$= p^2 - (2^2)^n = p^2 - 4^n = 65$

إذن $(y - x)(y + x) = 65 = 13 \times 5$

بما أن x و y هي أعداد صحيحة طبيعية

و $y - x < y + x$; ($-x < x$ لأن)

$$(S)\begin{cases} y - x = 5 & (1) \\ y + x = 13 & (2) \end{cases} \quad \text{أو} \quad (S')\begin{cases} y - x = 1 & (3) \\ y + x = 65 & (4) \end{cases}$$

2- لإجاد n و p يكفي حل النظمتين (S) و (S')

لدينا $x = 4 \Longleftarrow y = 9 \Longleftarrow 2y = 18 \Longleftarrow (1) + (2)$

إذن $2^n = x = 4 = 2^2$

و بالتالي $n = 2$

من جهة أخرى $p = y = 9$

إذن $n = 2$ و $p = 9$ تحقق المعادلة $4^n + 65 = p^2$

في النظمة S' : لدينا $y = 33 \Longleftarrow 2y = 66 \Longleftarrow (4) + (3)$

$x = 65 - 33 = 32 - 2^5$

إذن $2^n = x = 2^5$

إذ ن $n = 5$ و $p = 33$

إجمالا $n = 5$ و $p = 33$ أو $n = 2$ و $p = 9$ تحققان المعادلة : $4^n - 65 = p^2$

حل التمرين الخامس:

1- المعادلة هي بداية لمتطابقة هامة :

$x^2 - 6x + 7 = x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 - 3^2 + 7$

$= (x - 3)^2 - 9 + 7$

$= (x - 3)^2 - 2$

-2 $(x - 3)^2 - 2 = (x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2})$

إذن $x = 3 - \sqrt{2}$ $x = 3 + \sqrt{2}$

و بالتالي $S = \{3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$ هي المعادلة

3- حلول النظمة

$$\begin{cases} A + B = 6 & (1) \\ A^2 + B^2 = 22 & (2) \end{cases}$$

عند حل هذه النظمة نذكر أن هذا مرتبط بالسؤال الثاني لدلك يجب أن تصبح النظمة عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد A و B

لدينا $A = 6 - B$ ثم نعوض في (2)

$(6 - B)^2 + B^2 = 22$

$$36 - 12\,B + B^2 + B^2 = 22$$

$$2\,B^2 - 12\,B + 14 = 0$$

$$B^2 - 6\,B + 7 = 0$$

و هذا مل أردنا الحصول عليه !

حسب السؤال (2) لدينا $3 - \sqrt{2}$ و $3 + \sqrt{2}$ هو حلول المعادلة

و بالتالي $B = 3 - \sqrt{2}$ أو $B = 3 + \sqrt{2}$

$A = 6 - B = 6 - 3 - \sqrt{2}$ $\quad$ $A = 6 - B = 6 - 3 + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$

$$S = \{(3 + \sqrt{2}\ , 3 - \sqrt{2})\ ;\ (3 - \sqrt{2}\ , 3 + \sqrt{2})\}$$

حل التمرين السادس:

إذا كان x حل للمعادلة (E) فإن : $U + V = \sqrt{3} - 1$

و بالتالي (U , V) تحقق المعادلة الثانية من النظمة

بقي الآن أن نبين أن (U , V) تحقق المعادلة الأولى أي

يجب أن نبرهن أن $U + V = \sqrt{3} + 1$

$$U + V = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$$

$$= \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \times \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{x + 1 - (x - 1)}{U + V}$$

لدينا $U - V = \sqrt{3} - 1$

$$= \frac{2}{U - V}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{3} + 1$$

و بالتالي $U + V = \sqrt{3} + 1$ إذن الزوج (U , V) يحقق معادلتي (S)

يعني يحقق النظمة

$$\begin{cases} U + V = \sqrt{3} + 1 & (1) \\ U - V = \sqrt{3} - 1 & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Longleftarrow 2\,U = 2\sqrt{3} \Longleftarrow U = \sqrt{3}$

$$V = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1$$

و بالتالي $S = (\sqrt{3}\ ,\ 1)$ حل وحيد للنظمة S

3- وجدنا من خلال السؤال (2) $\sqrt{x+1} = U = \sqrt{3}$

$\sqrt{x-1} = V = 1$

إذن $x + 1 = 3$ و $(x - 1 = 1)$

إذن $x = 2$ (E)

$$\begin{cases} x + y = 43 & (1) \\ 2x + 5y = 164 & (2) \end{cases}$$

نضرب (1) في 2-

$$\begin{cases} -2x - 2y = -86 \\ 2x + 5y = 164 \end{cases}$$

ثم نجمع: $3y = 78 \Longrightarrow y = 26$ و $x = 43 - 26 = 17$

إذن $(17\ ,\ 26)$ حل وحيد للنظمة

حل التمرين السابع:

2- لاحظ أنه يجب استعمال السؤال (1) لحل هذه المسألة

و بالتالي يجب تحليل المعطيات و كتابتها على شكل رياضي من أجل الوصول

إلى كتابة نظمة السؤال (1)

لاحظ أن : 1460 د مكونة من

X عدد أوراق 20 درهم

Y عدد أوراق 50درهم

حسب المعطيات لدينا مجموع الأوراق هو 43 يعني :

$X + Y = 43 \quad (1)$

من جهة أخرى لدينا : $20X$ هو المبلغ ضمن 1640 د

وكذلك $50Y$ هو المبلغ المكون من أوراق 50 د

إذا أضعنا المبلغ $20X$ و $50Y$ نجد المبلغ الكلي 1640

و بالتالي $20X + 50Y + 1640$

إذا اختزلنا بالعدد 10 نجد $2X + 5Y = 164$ (2)

إذن نجد ما بحثنا عنه أي

$$\begin{cases} X + Y = 43 \\ 2X + 5Y = 164 \end{cases}$$

و حسب السؤال (1) لدينا $X = 17$ و $Y = 26$

إذن هناك 17 ورقة من فئة 20 دهم

كذلك 26 ورقة من فئة 50 دهم