3 coll

الترتيب والعمليات

I. مقارنة عددين حقيقيين :

خاصية

لمقارنة عددين حقيقين a و b نحدد إشارة فرقهما:

- ✓ إذا كان $a-b \geq 0$ فإن $a \geq b$
- ✓ إذا كان $a-b \leq 0$ فإن $a \leq b$

مثال :

لنقارن $\frac{3}{5}$ و $\frac{1}{2}$: إذن نحسب فرقهما $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3\times2-1\times5}{5\times2}=\frac{6-5}{10}=\frac{1}{10}$

وبما أن $\frac{1}{10} \geq 0$ لأنها موجبة إذن $\frac{3}{5}-\frac{1}{2} \geq 0$ وبالتالي $\frac{3}{5} \geq \frac{1}{2}$

II. الترتيب والعمليات :

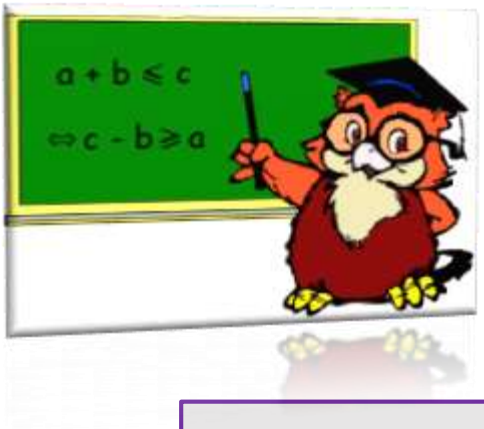
1. الترتيب والجمع والفرق:

hsaina.com

خاصية 1

a و b و c أعداد حقيقية :

- ✓ إذا كان $a \leq b$ فإن $a+c \leq b+c$ والعكس صحيح
- ✓ إذا كان $a-c \leq b-c$ فإن $a \leq b$ والعكس صحيح



أمثلة :

1- لنقارن $3+\sqrt{5}$ و $1+\sqrt{5}$

لدينا $1 \leq 3$ إذن $1+\sqrt{5} \leq 3+\sqrt{5}$

2- a و b عددان حقيقيان بحيث $a \leq b$

لنقارن $a-2\sqrt{3}$ و $b-2\sqrt{3}$:

لدينا $a \leq b$ إذن $a-2\sqrt{3} \leq b-2\sqrt{3}$

خاصية 2

a و b و c أعداد حقيقية :

- ✓ إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن $a+c \leq b+d$

مثال : لدينا $a \leq 5$ و $b \geq 3$ لنبين أن $a+b \leq 8$

لدينا $a \leq 5$ و $b \leq 3$ إذن $a+b \leq 5+3$ وبالتالي $a+b \leq 8$

2. الترتيب والضرب :

خاصية

a و b و k أعداد حقيقية :

✓ إذا كان $a \leq b$ و $k > 0$ فإن $a \times k \leq b \times k$

✓ إذا كان $a \leq b$ و $k < 0$ فإن $a \times k \geq b \times k$

أمثلة :

لدينا $2 \leq 5$ إذن $3 \times 2 \leq 3 \times 5$ وبالتالي $6 \leq 15$

لدينا $2 \leq 5$ إذن $-3 \times 2 \geq -3 \times 5$ وبالتالي $-6 \geq -15$

3. الترتيب والمقلوب :

خاصية

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعاً :

✓ إذا كان $a \leq b$ فإن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

✓ إذا كان $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ فإن $a \geq b$

➢ لدينا $2 \leq 4$ إذن $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$

➢ لدينا $\frac{1}{5\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{5}}$ إذن $5\sqrt{2} \leq 2\sqrt{5}$

www.hsaina.

4. خاصيات أخرى :

خاصية

a و b عددان حقيقيان موجبان :

✓ إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$

✓ إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

ملاحظة : إذا كان a و b سالبان فإنه إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$

أمثلة :

➢ لنقارن $2\sqrt{5}$ و $3\sqrt{2}$: لدينا $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$ و $(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$

وبما أن $18 < 20$ إذن $(3\sqrt{2})^2 < (2\sqrt{5})^2$ وبالتالي $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$

➢ لنقارن $2\sqrt{2} - 3$ و -3 : لدينا $(2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$ و $3^2 = 9$

لدينا $8 < 9$ إذن $(2\sqrt{2})^2 < 3^2$ إذن $2\sqrt{2} < 3$ وبالتالي $-2\sqrt{2} > -3$

III. التأطير :

تعريف

a و b و x أعداد حقيقية بحيث $a \leq b$:
الكتابة $a \leq x \leq b$ تسمى تأطيراً للعدد x

1. تأطير مجموع :

نعتبر جميع الأعداد حقيقية :
إذا كان $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ فإن $a + c \leq x + y \leq b + d$

أمثلة :

- x و y عددان حقيقيان بحيث : $2 \leq x \leq 5$ و $-3 \leq y \leq -1$ أطر $x + y$:

لدينا $2 + (-3) \leq x + y \leq 5 + (-1)$ إذن $2 - 3 \leq x + y \leq 5 - 1$

وبالتالي $-1 \leq x + y \leq 4$

- a و b عددان حقيقيان بحيث : $1 \leq a \leq 6$ و $-4 \leq a \leq 10$ أطر $a + b$:

لدينا $1 + (-4) \leq a + b \leq 6 + 10$ إذن $-3 \leq a + b \leq 16$

www.hsaina.com

2. تأطير فرق :

نعتبر جميع الأعداد حقيقية :
إذا كان $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ فإن $a - d \leq x + y \leq b - c$

مثال 1 : x و y عددان حقيقيان بحيث : $2 \leq x \leq 5$ و $1 \leq y \leq 6$

أطر $x - y$: أولاً نأطر $-y$

$\begin{cases} 1 \leq y \leq 6 \\ -6 \leq -y \leq -1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -6 \leq -y \leq -1 \end{cases}$

إذن $2 - 6 \leq x - y \leq 5 - 1$ وبالتالي $-4 \leq x - y \leq 4$

مثال 2 : a و b عددان حقيقيان بحيث : $1 \leq a \leq 3$ و $-7 \leq b \leq -2$

أطر $a - b$: أولاً نأطر $-b$

لدينا $-7 \leq b \leq -2$ إذن $2 \leq -b \leq 7$

إذن $\begin{cases} 1 \leq a \leq 3 \\ 2 \leq -b \leq 7 \end{cases}$

إذن $1 + 2 \leq a - b \leq 3 + 7$ وبالتالي $3 \leq a - b \leq 10$

3. تأطير جداء :

الحالة 1

نعتبر جميع الأعداد حقيقية موجبة : إذا كان $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$

فإن $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$

مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $2 \leq x \leq 5$ و $1 \leq y \leq 3$ أطر $x \times y$:

لدينا $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$ إذن $2 \times 1 \leq x \times y \leq 5 \times 3$ إذن $2 \leq xy \leq 15$

الحالة 2

a و b عددان حقيقيان موجبان و c و d عددان حقيقيان سالبان :

إذا كان $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ فإن $b \times c \leq x \times y \leq a \times d$

مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $-5 \leq y \leq -2$ أطر xy :

أولاً يجب أن تكون في حالة الضرب الأعداد المؤطرة ل y موجبة إذن : $\begin{cases} -5 \leq y \leq -2 \\ -(-2) \leq -y \leq -(-5) \end{cases}$

إذن أصبحت جميع الأعداد المؤطرة ل x و y موجبة : $\begin{cases} 3 \leq x \leq 7 \\ 2 \leq -y \leq 5 \end{cases}$

إذن $3 \times 2 \leq x \times (-y) \leq 7 \times 5$ إذن $6 \leq -xy \leq 35$ ولكن مطلوب منا أن نأطر xy

وليس $-xy$ إذن يجب أن نتخلص من إشارة - كما يلي : $\begin{cases} 6 \leq -xy \leq 35 \\ -35 \leq -(-xy) \leq -6 \end{cases}$

وبالتالي $-35 \leq xy \leq -6$

لا تنسى عندما نضرب أطراف متفاوتة في إشارة سالبة نقلب الترتيب

4. تأطير مقلوب :

x و a و b أعداد حقيقية بحيث $a \leq x \leq b$

تكافئ $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$

مثال : لدينا $2 \leq x \leq 4$ إذن $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$

5. تأطير خارج :

الحالة 1

نعتبر جميع الأعداد حقيقية موجبة : إذا كان $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$

فإن $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$ بحيث $y \neq 0$ و $c \neq 0$ و $d \neq 0$

www.hsaina.com

مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $6 \leq x \leq 10$ و $2 \leq y \leq 3$ أطر $\frac{x}{y}$:

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ إذن نأطر أولاً $\frac{1}{y}$: لدينا $\begin{cases} 2 \leq y \leq 3 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

لاحظ أن جميع الأعداد المؤطرة ل x و $\frac{1}{y}$ هي موجبة إذن سنقوم بعملية الضرب بدون قلب الترتيب

$6 \times \frac{1}{3} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 10 \times \frac{1}{2}$ إذن $\frac{6}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{10}{2}$ وبالتالي $2 \leq \frac{x}{y} \leq 5$

الحالة 2

a و b عددان حقيقيان موجبان و c و d عددان حقيقيان سالبان :

إذا كان $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ فإن $\frac{b}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{a}{c}$ بحيث $y \neq 0$ و $c \neq 0$ و $d \neq 0$

مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $6 \leq x \leq 10$ و $-3 \leq y \leq -2$ أطر $\frac{x}{y}$:

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ إذن نأطر أولاً $\frac{1}{y}$: لدينا $\begin{cases} -3 \leq y \leq -2 \\ \frac{1}{-2} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{-3} \end{cases}$ إذن تانياً نأطر $x \times \frac{1}{y}$ لكن

www.nsaina.com

لاحظ أن الأعداد المؤطرة ل $\frac{1}{y}$ سالبة إذن نحولها إلى أعداد موجبة كما يلي $\begin{cases} \frac{1}{-2} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{-3} \\ \frac{1}{3} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{3} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن جميع الأعداد المؤطرة ل x و $-\frac{1}{y}$ هي موجبة إذن سنقوم بعملية

الضرب $6 \times \frac{1}{3} \leq x \times \left(-\frac{1}{y}\right) \leq 10 \times \frac{1}{2}$ إذن $\frac{6}{3} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{10}{2}$ إذن $2 \leq -\frac{x}{y} \leq 5$ ولكن

طُلِبَ منا أن نأطر $\frac{x}{y}$ وليس $-\frac{x}{y}$ إذن يجب أن نتخلص من إشارة – كما يلي : $-2 \leq -\left(-\frac{x}{y}\right) \leq -5$

وبالتالي $-2 \leq \frac{x}{y} \leq -5$