

المعادلات والمترجمات

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

تعريف

- ✓ كل عبارة رياضية تحتوي على رمز = تسمى متساوية .
- ✓ كل متساوية على شكل $ax + b = 0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .

ملاحظة :

❖ حل المعادلة هو البحث عن جميع قيم x إن وجدت .

الحالة 1 : معادلات من نوع $ax + b = c$

حل المعادلات التالية :

$$5(x + 1) = 2x - 1$$

لدينا

$$5x + 5 = 2x - 1$$

$$5x - 2x = -1 - 5$$

$$3x = -6$$

$$x = \frac{-6}{3}$$

وبالتالي المعادلة تقبل حل وحيد هو $x = -2$

$$2x + 5 = 2(x + 1) + 3$$

لدينا

$$2x + 5 = 2x + 2 + 3$$

$$2x - 2x = 5 - 5$$

$$0x = 0$$

إذن مهما كان x فإن $0 = 0$

وبالتالي جميع الأعداد الحقيقية حلول لهذه المعادلة

$$-3x + 4 = 0$$

لدينا

$$-3x = -4$$

يعني أن

$$x = \frac{-4}{-3}$$

إذن

$$x = \frac{4}{3}$$

ومنه

$$\frac{4}{3}$$

وبالتالي المعادلة تقبل حل وحيد هو $\frac{4}{3}$

$$3(2x - 1) = 6x + 7$$

لدينا

$$6x - 3 = 6x + 7$$

$$6x - 6x = 7 + 3$$

$$0x = 10$$

وهذا غير ممكن لأن $0 \neq 10$

وبالتالي المعادلة لا تقبل حل .

الحالة 2 : معادلات من نوع $(ax + b)(cx + d) = 0$

خاصية

a و b عدنان حقيقيان : $a \times b = 0$ يعني $a = 0$ أو $b = 0$

حل المعادلتين التاليتين :

$$x^2 - 7x = 0$$

لدينا

$$x(x - 7) = 0$$

يعني أن

$$x = 0 \text{ أو } x - 7 = 0$$

المعادلة تكافئ

$$x = 0 \text{ أو } x = 7$$

إذن

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما 0 و 7

$$(x + 1)(2x - 3) = 0$$

لدينا

$$x + 1 = 0 \text{ أو } 2x - 3 = 0$$

تكافئ

$$x = -1 \text{ أو } x = \frac{3}{2}$$

إذن

$$\frac{3}{2}$$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما -1 و $\frac{3}{2}$

الحالة 3 : معادلات تحتوي على كسور

ملاحظة : عموماً لحل هذا النوع من المعادلات نوحدها المقام .

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{2}{1} = \frac{x-1}{3}$$

$$\frac{3 \times (2x+1)}{15} - \frac{15 \times 2}{15} = \frac{5 \times (x-1)}{15}$$

$$6x + 3 - 30 = 5x - 5$$

$$6x - 5x = -5 - 3 + 30$$

$$x = 22$$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو 22

$$\frac{2x+1}{5} = \frac{x-1}{3}$$

حل المعادلة :

$$3 \times (2x + 1) = 5 \times (x - 1)$$

$$6x + 3 = 5x - 5$$

$$6x - 5x = -5 - 3$$

$$x = -8$$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو -8

$$\frac{2x+1}{5} - 2 = \frac{x-1}{3}$$

حل المعادلة :

الحالة 4 : معادلات من نوع $x^2 = a$

ملاحظة : لحل هذا النوع من المعادلات تذكر المتطابقة $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

خاصية

إذا كان $a = 0$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً هو $x = 0$
إذا كان $a > 0$ المعادلة تقبل حلين هما \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$
إذا كان $a < 0$ المعادلة لا تقبل حل .

$$(2x - 1 + 3)(2x - 1 - 3) = 0$$

$$(2x + 2)(2x - 4) = 0$$

$$2x + 2 = 0 \quad \text{أو} \quad 2x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-2}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{4}{2}$$

$$x = -1 \quad \text{أو} \quad x = 2$$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما 2 و -1

$$x^2 + 12 = 2$$

حل المعادلة :

$$x^2 = 2 - 12$$

$$x^2 = -10$$

إذن المعادلة لا تقبل حل لأن x^2 يكون

$$x^2 \geq 0 \quad \text{دائماً موجباً أو منعدماً}$$

$$(2x - 1)^2 - 9 = 0$$

حل المعادلة :

$$(2x - 1)^2 - 3^2 = 0$$

الحالة 5 : حل معادلة بالتعميل إذا ما وجد عامل مشترك

$$(x + 2)(7(x + 2)) - (x - 1) = 0$$

$$(x + 2)(7x + 14 - x + 1) = 0$$

$$(x + 2)(6x + 15) = 0$$

$$x = -2 \quad \text{أو} \quad x = \frac{-15}{6}$$

إذن المعادلة تقبل حلين هما -2 و $\frac{-15}{6}$

$$2x(x + \sqrt{2}) - \sqrt{3}(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$(x + \sqrt{2})(2x - \sqrt{3}) = 0$$

$$x + \sqrt{2} = 0 \quad \text{أو} \quad 2x - \sqrt{3} = 0$$

$$x = -\sqrt{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$7(x + 2)^2 = (x + 2)(x - 1)$$

حل المعادلة:

الحالة 6 : حل معادلة بالنشر إذا لم يوجد عامل مشترك

$$\text{حل : } -4(2x + 1) + x = 2(-x + 5)$$

$$-8x - 4 + x = -2x + 10$$

$$-8x + x + 2x = 10 + 4$$

$$-5x = 14$$

$$x = \frac{14}{-5} = -\frac{14}{5}$$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو $-\frac{14}{5}$

$$\text{حل المعادلة : } x(x + 3) = x^2 - 15$$

$$x^2 + 3x = x^2 - 15$$

$$x^2 - x^2 + 3x = -15$$

$$x = \frac{-15}{3}$$

$$x = -5$$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو -5

المسألة المرتبطة بالمعادلة :

لحل مسألة نتبع الخطوات التالية :

- (1) قراءة المسألة بتمعن وتأكد أن المعطيات كافية وفي علاقة في ما بينهم مثل (أحدهم يمثل الضعف- النصف- الربع- السدس - نفس - يزيد عن - ينقص عن.....) بالنسبة للمعطى الأخر.
- (2) اختيار المجهول x من السؤال المطروح .
- (3) استغلال معطيات نص المسألة وصياغة معادلة .
- (4) حل المعادلة .
- (5) التحقق من منطوقية الحل .

يصرف أستاذ نصف أجرته في الكراء والمأكل والمشرب ، وثلثها يرسله إلى أمه وسبعها في اللباس والتنقل ويوفر بأعجوبة $150 dh$. فما هي أجرته الشهرية ؟

اختيار المجهول : ليكن x أجره هذا الأستاذ الشهرية .

صياغة المعادلة :

✓ بما أن نصف الأجرة يصرفه في الكراء والمأكل والمشرب هذا يمثل $\frac{x}{2}$

✓ والثالث يرسله إلى أمه هذا يمثل $\frac{x}{3}$

✓ والسبع يصرفه في اللباس والتنقل هذا يمثل $\frac{x}{7}$

✓ ويوفر $150 dh$.

إذن مجموع المصاريف زائد ما يوفر يساوي أجرته الشهرية .

إذن المعادلة هي : $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{7} + 150 = x$

حل المعادلة : المعادلة تكافئ $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{7} + \frac{150}{1} = \frac{x}{1}$

$$\frac{21 \times x}{21 \times 2} + \frac{14 \times x}{14 \times 3} + \frac{6 \times x}{6 \times 7} + \frac{42 \times 150}{42 \times 1} = \frac{42 \times x}{42 \times 1}$$

$$\frac{21x}{42} + \frac{14x}{42} + \frac{6x}{42} + \frac{6300}{42} = \frac{42x}{42}$$

$$21x + 14x + 6x + 6300 = 42x$$

$$41x + 6300 = 42x$$

$$41x - 42x = -6300$$

$$-x = -6300$$

$$x = 6300$$



الرجوع إلى المسألة والتحقق من الحل : إذا كان $x = 6300$ فإن :

$$\frac{6300}{2} + \frac{6300}{3} + \frac{6300}{7} + 150 = 3150 + 2100 + 900 + 150 = 6300$$

وبالتالي أجرة هذا الأستاذ الشهرية هي 6300 dh

مسألة : الإمتحان الجهوي لجهة مكناس-تافيلالت دورة يونيو 2014 .

حدد عدد تلاميذ ثانوية إعدادية إذا علمت أن نصفهم يدرسون بمستوى الأولى الأعدادي ، وربعهم بمستوى الثانية و70 تلميذاً يدرسون بمستوى الثالثة إعدادي .

II. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

تعريف

- ✓ المتراجحة أو المتباينة هي جملة رياضية تضم $> ; \geq ; < ; \leq ; \neq$.
- ✓ المتراجحة $ax + b > 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .

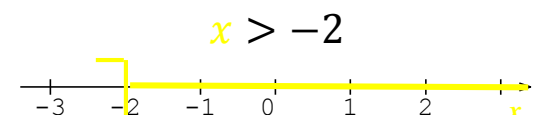
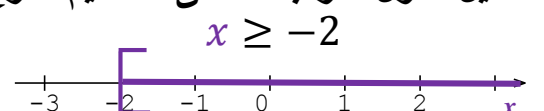
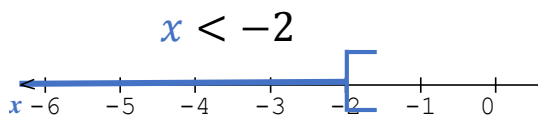
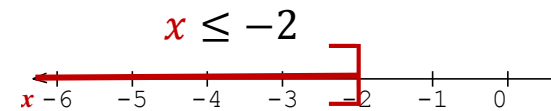
ملاحظة :

❖ حل المتراجحة هو أي قيمة ل x تجعل المتراجحة صحيحة .

على سبيل المثال : -2 و -1 و 0 و 1 و $70\ 000$ هي حلول للمتراجحة $x \geq -2$

على سبيل المثال : -1 و 0 و 1 و $70\ 000$ هي حلول للمتراجحة $x > -2$

تمثيل حلول متراجحة على مستقيم مدرج :



الحالة 1 : إذا كان $a > 0$ فإن حلول المتراجحة $ax + b < 0$ هي $x < \frac{-b}{a}$

حل المتراجحة : $3(x - 1) > x + 5$

$$3x - 3 > x + 5$$

$$3x - x > 5 + 3$$

$$2x > 8$$

$$x > 4$$

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأكبر قطعاً من 4

حل المتراجحة : $4x - 5 \leq 2x + 3$

$$4x - 2x \leq 3 + 5$$

$$2x \leq 8$$

$$x \leq \frac{8}{2}$$

$$x \leq 4$$

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأكبر أو تساوي 4

الحالة 2 : إذا كان $a < 0$ فإن حلول المتراجحة $ax + b < 0$ هي $x > \frac{-b}{a}$ نقلب الرمز

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأصغر قطعاً من -6

$$\frac{x}{2} + \frac{3-4x}{3} > 1$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{2(3-4x)}{6} > \frac{6}{6}$$

$$3x + 6 - 4x > 6$$

$$3x - 4x > 6 - 6$$

$$-x > 0 \quad \text{بما أن}$$

$$x < 0 \quad \text{فإن}$$

إذن الحلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأصغر قطعاً من 0

حل المتراجحة : $2x - 6 \geq 7x - 1$

$$2x - 7x \geq -1 + 6$$

$$-5x \geq 5$$

$$x \leq \frac{5}{-5} \quad \text{نزل } -5 \text{ وأقلب الرمز}$$

$$x \leq -1$$

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأصغر أو تساوي -1

$$\frac{x}{-3} > 2$$

$$-3 \times \frac{x}{-3} < -3 \times 2$$

$$x < -6$$

الحالة 3 : متراجحات لا تقبل حل

$$\frac{2x-5}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{6}$$

$$\frac{2(2x-5)}{6} - \frac{3(x+1)}{6} \geq \frac{x}{6}$$

$$\frac{4x-10-3x-3}{6} \geq \frac{x}{6}$$

$$4x - 3x - x \geq 10 + 3$$

$$0x \geq 13 \quad \text{وهذا غير ممكن لأن } 0 \leq 13$$

إذن المتراجحة ليس لها حل

الحالة 4 : متراجحات لها ما لانهاية من الحلول

$$5(2x - 1) - 7x < 3(x + 1)$$

$$10x - 5 - 7x < 3x + 3$$

$$10x - 7x - 3x < 3 + 5$$

$$0x < 8$$

وهذا ممكن لأن مهما كان x فإن $0 < 8$

إذن المتراجحة لها ما لانهاية من الحلول .

المسألة المرتبطة بالمراجعة :

ممون الحفلات يقترح الصيغتين التاليتين لكراء الأواني :

الصيغة الأولى : $100dh$ إضافة إلى $30dh$ للساعة الواحدة .

الصيغة الثانية : $200dh$ إضافة إلى $20dh$ للساعة الواحدة .

- (1) تريد استغلال الأواني لمدة 6 ساعات أي الصيغتين تختار ؟
- (2) حدد عدد الساعات الممكنة بحيث تكون للصيغتين المقترحتين نفس الكلفة ؟
- (3) حدد عدد الساعات الممكنة بحيث تكون الصيغة الأولى **أقل** كلفة ؟

ملاحظة :

عندما نستخدم تعبيراً مثل (**على الأقل** - **أكثر من** - **أفضل** - **أدنى** - **أقصى** ...) فإننا نتكلم عن مترابحة .
(1) ليكن x عدد الساعات إذن :

$$\text{الصيغة 1 هي : } 30x + 100 = 30 \times 6 + 100 = 280 dh$$

$$\text{الصيغة 2 هي : } 20x + 200 = 20 \times 6 + 200 = 320 dh$$

بما أن $280dh < 320dh$ إذن سأختار الصيغة 1

(2) تكون للصيغتين نفس الكلفة إذا كان : $30x + 100 = 20x + 200$

$$30x - 20x = 200 - 100$$

$$10x = 100 \text{ يعني أن}$$

$$\text{إذن } x = \frac{100}{10} = 10$$

التحقق من المعادلة : إذا كان $x = 10$ فإن تكلفة :

$$\text{الصيغة 1 هي : } 30 \times 10 + 100 = 400 dh = \text{المبلغ}$$

$$\text{الصيغة 2 هي : } 20 \times 10 + 200 = 400 dh = \text{المبلغ}$$

وبالتالي عدد الساعات لتكون للصيغتين نفس الكلفة هو 10 .

(3) تكون الصيغة 1 أقل تكلفة من الصيغة 2 ، إذا كان $30x + 100 < 20x + 200$

$$\text{يعني أن } 30x - 20x < 200 - 100$$

$$\text{إذن } 10x < 100$$

$$\text{ومنه } x < 10$$

إذن ستصبح الصيغة 1 أقل كلفة من الصيغة 2 عندما يكون عدد ساعات استغلال الأواني أقل من 10 ساعات.