الدرس ① : المعادلات والمتراجحات

I - المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1) تعريف :

a و b و x أعداد حقيقية.

كل مساواة على شكل $ax+b=0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

2) أمثلة :

كل من العبارات $2x+3=0$ و $\sqrt{2}x-\frac{1}{2}=0$

$2x+8=\sqrt{3}x+1$ و $-7x-5=4$

تسمى معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x

(مجهول هو x)

ملاحظة: حل المعادلة هو البحث عن جميع قيم x التي تحقق هذه المعادلة (إن وجدت)

3) حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

أ - قاعدة:

* في معادلة، يمكن تحويل حد من طرف إلى الطرف الآخر شريطة تغيير إشارة هذا الحد.
* لحل معادلة، نضع الحدود التي تحتوي على المجهول في طرف والحدود المعلومة في الطرف الآخر، وذلك بتطبيق القاعدة السابقة.

ب - حالات وتقنيات الحل:

الحالة ① : معادلات من نوع $ax+b=c$

المعادلة $-3x+4=0$ تكافئ على التوالي

$-3x=-4$

$x=\frac{-4}{-3}$

$\boxed{x=\frac{4}{3}}$

وبالتالي حل هذه المعادلة هو العدد $\frac{4}{3}$

المعادلة $5(x+1)=2x-1$ تكافئ على التوالي

$5x+5=2x-1$

$5x-2x=-1-5$

$3x=-6$

$x=\frac{-6}{3}$

$\boxed{x=-2}$

وبالتالي حل هذه المعادلة هو العدد -2.

المعادلة $2x+5=2(x+1)+3$ تكافئ على التوالي

$2x+5=2x+2+3$

$2x-2x=5-5$

$0x=0$

وبالتالي جميع الأعداد الحقيقية حلول لهذه المعادلة

المعادلة $3(2x-1)=6x+7$ تكافئ على التوالي

$6x-3=6x+7$

$6x-6x=7+3$

$0x=10$

وهذا غير محقق

وبالتالي هذه المعادلة ليس لها حل.

الحالة ② : معادلات من نوع $(ax+b)(cx+d)=0$

خاصية: الجداء المنعدم.

حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$ هي حلول المعادلتين $ax+b=0$ و $cx+d=0$

المعادلة $(x+1)(2x-3)=0$ تكافئ على التوالي

$x+1=0$ أو $2x-3=0$

$x=-1$ أو $2x=3$

$x=-1$ أو $x=\frac{3}{2}$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما -1 و $\frac{3}{2}$

المعادلة $x^2-7x=0$ تكافئ على التوالي

$x(x-7)=0$

$x=0$ أو $x-7=0$

$x=0$ أو $x=7$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما 0 و 7

* الحالة ③ : معادلات تحتوي على كسور

ملاحظة : نعمد لحل هذا النوع من المعادلات، توحيد المقام.

① المعادلة $\frac{2x+1}{5} = \frac{x-1}{3}$ تكافئ على التوالي

$3(2x+1) = 5(x-1)$

$6x+3 = 5x-5$

$6x-5x = -5-3$

$x = -8$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 8-

② المعادلة $\frac{2x+1}{5} - 2 = \frac{x-1}{3}$ تكافئ على التوالي

$\frac{3(2x+1)-30}{15} = \frac{5(x-1)}{15}$

$6x+3-30 = 5x-5$

$6x-5x = -5-3+30$

$x = 22$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 22

* الحالة ④ : معادلات من نوع $x^2 = a$

ملاحظة : لحل هذا النوع من المعادلات نذكر المتطابقة ③ : $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

خاصية :

حلول المعادلة $x^2 = a$

* إذا كان $a=0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 0
* إذا كان $a>0$ المعادلة تقبل حلين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
* إذا كان $a<0$ المعادلة لا تقبل حلا

① المعادلة $x^2+12 = 2$ تكافئ على التوالي

$x^2 = 2-12$

$x^2 = -10$

إذن هذه المعادلة ليس لها حل.

② المعادلة $(2x-1)^2-9 = 0$ تكافئ على التوالي

$(2x-1)^2-3^2 = 0$

$(2x-1-3)(2x-1+3) = 0$

$(2x-4)(2x+2) = 0$

$2x-4=0$ أو $2x+2=0$

$2x=4$ أو $2x=-2$

$x = \frac{4}{2} = 2$ أو $x = \frac{-2}{2} = -1$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما 1- و 2

* الحالة ⑤ : حل معادلة بالتحليل إذا وجد عامل مشترك

① المعادلة $2x(x+\sqrt{2})-\sqrt{3}(x+\sqrt{2}) = 0$ تكافئ على التوالي

$(x+\sqrt{2})(2x-\sqrt{3}) = 0$

$x+\sqrt{2}=0$ أو $2x-\sqrt{3}=0$

$x = -\sqrt{2}$ أو $2x = \sqrt{3}$

$x = -\sqrt{2}$ أو $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن المعادلة تقبل حلين هما $-\sqrt{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$

* الحالة ⑥ : حل معادلة بالنشر إذا لم يوجد عامل مشترك

المعادلة $x(x+3) = x^2-15$ تكافئ على التوالي

$x^2+3x = x^2-15$

$x^2-x^2+3x = -15$

$x = \frac{-15}{3}$

$x = -5$

المعادلة تقبل حلا وحيدا هو العدد 5-

II - حل المسائل :

① خطوات حل مسألة :

لحل مسألة نتبع الخطوات التالية :

1) اختيار المجهول
2) ترجمة المعادلة : تحويل المعطيات إلى معادلة
3) حل المعادلة.
4) الرجوع إلى المسألة : المقارنة بين الحل والجواب على السؤال.

II - المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

1) تعريف:

a و b و x أعداد حقيقية

كل متفاوتة على الشكل $ax+b<0$ أو $ax+b\leq 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

*ملاحظات:

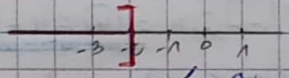
- ليكن للمتراجحة أي تحتوي على أحد الرمزين $\geq$ أو $\leq$
- حل المتراجحة هو إيجاد قيم x التي تحقق المتراجحة

2) أمثلة:

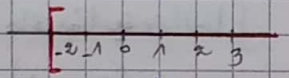
المتفاوتتان $2x+5<0$ و $\sqrt{2}x-7\geq 0$ و $3x+7\geq \frac{2}{3}x-14$ متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

* مثال حلول متراجحة على مستقيم مدرج.

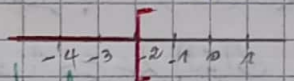
$x\leq -2$



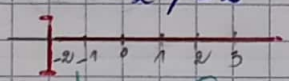
$x\geq -2$



$x<-2$



$x>-2$



3) حل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

* الحالة ①: إذا كان $a>0$ فإن حلول المتراجحة $ax+b<0$ هي $x<-\frac{b}{a}$ (لا نغلب الرمز)

* المتراجحة $4x-5\leq 2x+3$ نكافئ على التوالي

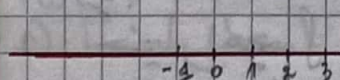
$4x-2x\leq 3+5$

$2x\leq 8$

$x\leq \frac{8}{2}$

$x\leq 4$

إذن حلول هذه المتراجحة هي الأعداد الحقيقية الأصغرأو تساوي 4



* الحالة ②: إذا كان $a<0$ فإن حلول المتراجحة $ax+b<0$ هي $x>-\frac{b}{a}$ (نغلب الرمز)

2) مثال:

عمر أب هو 50 سنة وأعمار أبنائه الثلاثة هي 10 سنوات، 13 سنة و15 سنة. بعد كم سنة سيصبح عمر الأب مساويا لمجموع أعمار أبنائه؟

الحل:

* اختيار المجهول: ليكن x عدد السنوات التي سيصبح فيها عمر الأب مساويا لمجموع أعمار أبنائه.

* صياغة المعادلة:

بعد مرور x سنة، ستصبح الأعمار كما يلي:

عمر الأب $50+x$

أعمار الأبناء هي: $10+x$ و $13+x$ و $15+x$

بعد مرور x سنة يصبح عمر الأب مساويا لمجموع أعمار أبنائه حسب المعادلة هي:

$10+x+13+x+15+x=50+x$

* حل المعادلة:

المعادلة $10+x+13+x+15+x=50+x$ تكافئ على التوالي

$3x+38=x+50$

$3x-x=50-38$

$2x=12$

$x=\frac{12}{2}$

$x=6$

* الرجوع إلى المسألة:

إذن: $10+6=16$ و $13+6=19$ و $15+6=21$ و $50+6=56$

$16+19+21=56$

إذن فالحل هو:

بعد مرور 6 سنوات سيصبح عمر الأب هو 56

ومجموع أعمار أبنائه هو: $16+19+21=56$

* المتراجحة $2x-6 \geq 7x-1$ تكافئ على التوالي

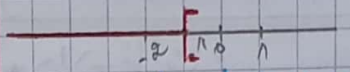
$2x-7x \geq -1+6$

$-5x \geq 5$

$x \leq \frac{5}{-5}$

$x \leq -1$

إذن حلول هذه المتراجحة هي جميع الأعداد الحقيقية الأصغر قطعا من 1-



* الحالة ③ : متراجحات لا تقبل حل.

المتراجحة $\frac{2x-5}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{6}$ تكافئ على التوالي

$\frac{2(2x-5)-3(x+1)}{6} \geq \frac{x}{6}$

$4x-10-3x-3 \geq x$

$4x-3x-x \geq 10+3$

$0 \geq 13$

وهذا غير ممكن

إذن المتراجحة ليس لها حل.

* الحالة ④ : متراجحات لها حلا لا نهائيا من الحلول.

المتراجحة $5(2x-1)-7x < 3(x+1)$

تكافئ على التوالي

$10x-5-7x < 3x+3$

$10x-7x-3x < 3+5$

$0 < 8$ وهذا دائما صحيح

إذن جميع الأعداد الحقيقية هي حلول لهذه المتراجحة.

4) مسائل من درجة و المتراجحات:

أ- طريقة:

لحل مسألة من درجة بمتراجحة، نتبع المراحل التالية:

1) اختيار المجهول.

2) صياغة المتراجحة، تحويل المعطيات إلى متراجحة

3) حل المتراجحة.

4) الرجوع إلى المسألة: الجواب على السؤال.

ملاحظة: عندما نستخدم في المسألة تعبيرا مثل (على الأقل - على الأكثر - أكثر من - أقل - أدنى - أقصى ...) فإننا نتكلم على متراجحة.

ب- مثال:

مهرجان خلال يفتح الصيفيتين التاليتين لكراء الأواني:

الصيغة ①: 100dh إضافة إلى 30dh للساعة الواحدة

الصيغة ②: 200dh إضافة إلى 20dh للساعة الواحدة

حدد عدد الساعات الممكنة بحيث تكون الصيغة الأولى أقل كلفة

* اختيار المجهول: ليكن x هو عدد الساعات

* صياغة المتراجحة:

تكلفة الصيغة ① هي: $30x+100$

تكلفة الصيغة ② هي: $20x+200$

الصيغة الأولى أقل كلفة إذن المتراجحة هي

$30x+100 < 20x+200$

* حل المتراجحة:

المتراجحة $30x+100 < 20x+200$ تكافئ على التوالي

$30x-20x < 200-100$

$10x < 100$

$x < \frac{100}{10}$

$x < 10$

* الرجوع إلى المسألة:

تكون الصيغة 1 أقل كلفة من الصيغة 2 عندما يكون عدد ساعات استغلال الأواني أقل من 10 ساعات

التمرين 5: في الحالة ⑤ لحل المعادلات:

* المعادلة $x^2-6x+9=0$ تكافئ في الحالة

$x^2-2\times x\times 3+3^2=0$

$(x-3)^2=0$

$x-3=0$

$x=3$

حل هذه المعادلة هو العدد 3

* المعادلة $25x^2+30x+9=0$ تكافئ في الحالة

$(5x)^2+2\times 5x\times 3+3^2=0$

$(5x+3)^2=0$

$5x+3=0$

$5x=-3$

$x=\frac{-3}{5}$

حل هذه المعادلة هو العدد $-\frac{3}{5}$

* تحليل هذه المعادلة:

* المعادلة $(x-1)(x+3)+x^2-1=0$ تكافئ في الحالة

$(x-1)(x+3)+(x-1)(x+1)=0$

$(x-1)(x+3+x+1)=0$

$(x-1)(2x+4)=0$

$x-1=0$ ou $2x+4=0$

$x=1$ ou $2x=-4$

$x=1$ ou $x=\frac{-4}{2}=-2$

المعادلة تقبل حلين هما 1 و -2