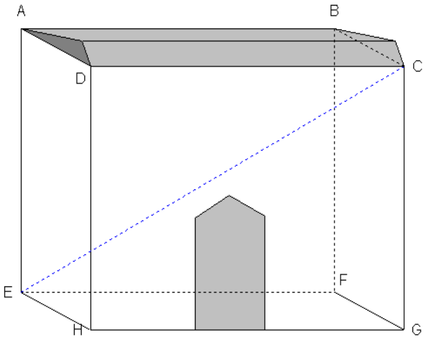
الهندسة الفضـــــــــــــائية

نشاط تمهيدي

بمساعدة من بناء محترف تمكن محمد من بناء منزل على شكل متوازي المستطيلات أبعاده $CG = 4m$ و $HG = 6m$ و $GF = 3m$ (أنظر الشكل).



1 – حدد في الشكل المستقيمات المتوازية .علل جوابك .

2 – حدد في الشكل المستقيمات المتعامدة .علل جوابك.

3 – بين أن $EG^2 = FG^2 + HG^2$. ثم أحسب EG .

4 – بين أن $EC^2 = CG^2 + FG^2 + HG^2$. ثم أحسب EC

5 – أحسب حجم متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$

6 – أراد علي أخ محمد تشييد منزل أبعاده تساوي ضعف أبعاد منزل محمد .

أ – ماهو حجم هذا المنزل ؟

ب– إستنتج العلاقة التي تجمع بين حجمي منزلي علي و محمد .

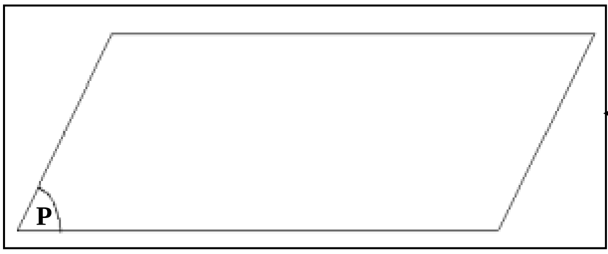
I. المستوى في الفضاء

تعريف1

المستوى هو حيز من الفضاء محدد بمستقيمين متقاطعين أو مستقيمين متوازيين أو مستقيم و نقطة خارجه أو ثلاثة نقط غير مستقيمية .

1 - تمثل مستـــــــــــوى

غالبا ما نمثل مستوا (P) بواسطة متوازي الأضلاع كما يوضح الشكل جانبه .



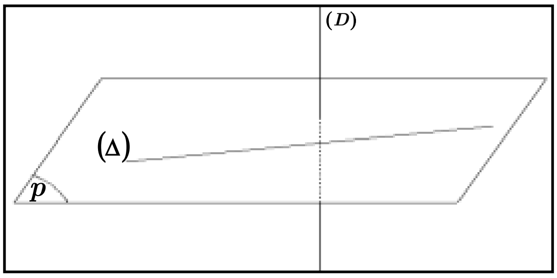
2– الأوضاع النسبة لمستقيمين في الفضاء.

أ ـ المستقيمان الغير مستوائيان .

تعريف2

نقول إن مستقيمين (D) و (Δ) غير مستوائيين إذا كانا لا يوجدان ضمن نفس المستوى.

في الشكل جانبه المستقيمان (D) و (Δ) غير مستوائيان

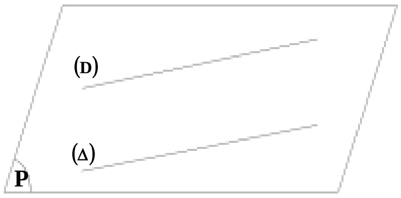
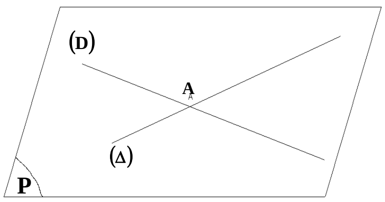
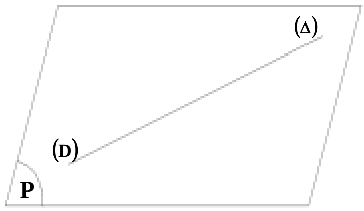


ب ـ المستقيمان المستوائيان .

تعريف3

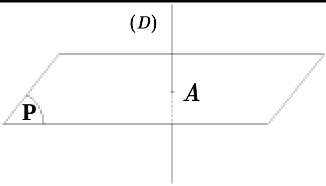
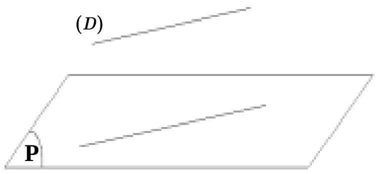
المستقيمان المستوائيان هما مستقيمان يوجدان ضمن نفس المستوى .

الأوضاع النسبية لمستقيمين في المستوى

(D) و (Δ) متوازيان	(D) و (Δ) متقاطعان	(D) و (Δ) منطبقان
		
و نكتب $(D)//(\Delta)$.	و نكتب $(D)\cap(\Delta)=\{A\}$.	و نكتب $(D)\equiv(\Delta)$.

3− الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

(P) مستوا و (D) مستقيما من الفضاء .

(D) ضمن المستوى (P)	(D) يخترق (P)	(D) يوازي (P)
		
و نكتب $(D)\subset(P)$	و نكتب $(D)\cap(P)=\{A\}$	و نكتب $(D)//(P)$

4− تعامد مستقيم و مستوى

تعريف4

يكون مستقيم (D) عموديا على مستوا (P) في نقطة A إذا كان عموديا في النقطة A على مستقيمين من المستوى (P) متقاطعين في النقطة A .

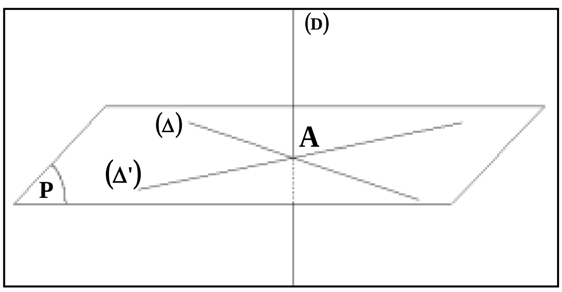
بتعبير آخر

إذا كان $(D)\perp(\Delta)$ و $(D)\perp(\Delta')$

و (Δ') و (Δ) ضمن المستوى (P)

فإن $(D)\perp(P)$

(أنظر الشكل جانبه)



خاصية1

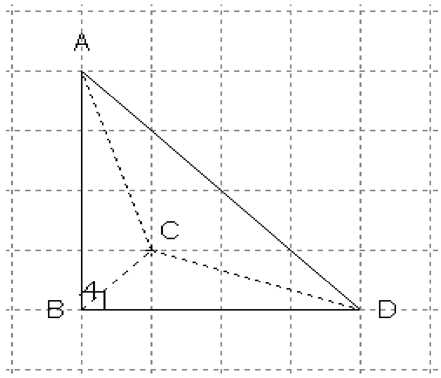
إذا كان (D) مستقيما عموديا على المستوى (P) فإنه عمودي على جميع المستقيمات الموجودة ضمن المستوى (P)

تطبيق 1

نعتبر الشكل أسفله بحيث $(AB)\perp(BC)$ و $(AB)\perp(BD)$.

لتكن I منتصف $[CD]$.

بين أن $(AB)\perp(BI)$.



الحل

. لنبين أن $(AB)\perp(BI)$.

لدينا $(AB)\perp(BC)$

و $(AB)\perp(BD)$.

و بما أن (BC) و (BD) مستقيمان متقاطعان ضمن المستوى (BCD).

فإن $(AB)\perp(BCD)$.

ولدينا I منتصف $[CD]$ إذن $I\in[DC]\subset(BCD)$.

ومنه (BI) ضمن المستوى (BCD).

و بالتالي $(AB)\perp(BI)$.

5- توازي مستقيم و مستوى

تعريف5

نقول إن مستقيما (D) يوازي مستوى (P) إذا كان لا يشتركان في أية نقطة

خاصية2

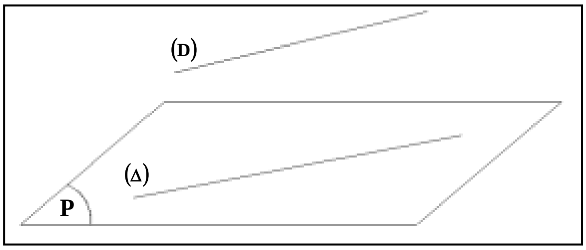
إذا وازى مستقيم (D) مستقيما (Δ) يوجد ضمن مستوى (P) فإن (D) يوازي (P)

بتعبير آخر

إذا كان $(\Delta)\subset(P)$ و $(D)//(\Delta)$

فإن $(D)//(P)$

(أنظر الشكل جانبه)

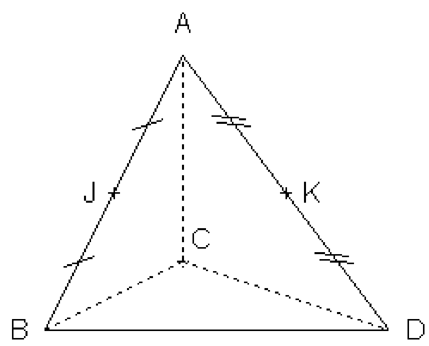


تطبيق 1

نعتبر الشكل أسفله بحيث J منتصف $[AB]$

و K منتصف $[AD]$.

بين أن $(JK)//(CBD)$.



. بين أن $(JK)//(CBD)$.

نعتبر المثلث ABD.

لدينا J منتصف $[AB]$.

و K منتصف $[AD]$.

(المستقيم المار من منتصفي ضلعين في مثلث يوازي حامل الضلع الثالث).

إذن $(JK)//(BD)$.

و بما أن $(BD)\subset(BCD)$.

فإن $(JK)//(CBD)$.

6– تـــــطـــــــبيقات

أ – مبرهنة فيتاغورس

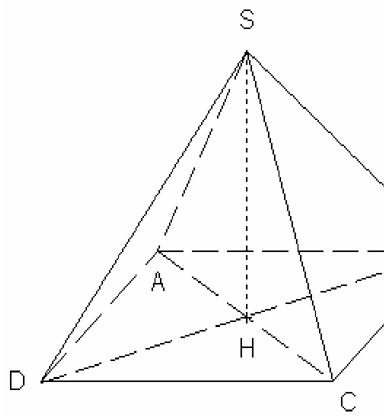
خاصية3

ABC مثلث قائم الزاوية في A يعني $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

تطبيق3

الشكل جانبه يمثل هرما منتظما SABCD إرتفاعه [SH] و قاعدته ABCD عبارة عن مربع بحيث : $AC = BD = 12cm$ و $SH = 12cm$.

احسب BC و SC .



الحل

لنحسب المسافة BC

نعتبر المثلث ACB قائم الزاوية في B (لأن الرباعي ABCD مربع)

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة

$$BC^2 + AB^2 = AC^2$$

يكافئ $BC^2 + BC^2 = AC^2$ ($AB = BC$ لأن الرباعي ABCD مربع)

تكافئ $2BC^2 = AC^2$ ت . ع

$2BC^2 = 12^2$

تكافئ $2BC^2 = 144$

يكافئ $\frac{1}{2} \times 2BC^2 = \frac{1}{2} \times 144$

يكافئ $BC^2 = 72$

وبما أن $BC > 0$

فإن $BC = \sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$

لنحسب المسافة SC .

لدينا $[SH]$ إرتفاع الهرم SABCD

إذن $[SH]$ عمودي على مستوى القاعدة ABCD في H

وبما أن $(HC) \subset (ABCD)$ فإن

$(SH) \perp (HC)$

ومن المثلث SHC القائم الزاوية في H حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة لدينا

$$SH^2 + HC^2 = SC^2$$

ت . ع $12^2 + 6^2 = SC^2$

يكافئ $144 + 36 = SC^2$

يكافئ $180 = SC^2$

وبما أن $SC > 0$ فإن

$$SC = \sqrt{180} = \sqrt{6^2 \times 5} = 6\sqrt{5}$$

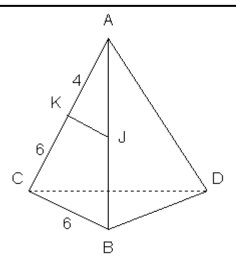
ب – مبرهنة طاليس

مثال :

نعتبر الشكل جانبه بحيث $(KJ) // (CB)$ و $AK = 4$ و $KC = 6$ و $CB = 6$

1 . أحسب المسافة KJ .

2 . I نقطة من $[BC]$ بحيث $CI = 2,4$. بين أن $(JI) // (AC)$.



الحل

1 . لنحسب KJ

نعتبر المثلث ABC

لدينا $(KJ)//(CB)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة :

لدينا $\frac{AK}{AC}=\frac{AJ}{AB}=\frac{KJ}{BC}$

ت . ع $\frac{4}{10}=\frac{AJ}{AB}=\frac{KJ}{6}$

من العلاقة $\frac{4}{10}=\frac{KJ}{6}$ نستنتج أن

$KJ=\frac{4}{10}\times 6$ ومنه $KJ=2,4$

2 . لنبين أن $(JI)//(AC)$.

نعتبر المثلث ABC

لدينا $\frac{CI}{CB}=\frac{2,4}{6}=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$

و $\frac{AJ}{AB}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

ومنه $\frac{AJ}{AB}=\frac{CI}{BC}=\frac{2}{5}$

وبما أن $I\in[BC]$ و $J\in[AB]$ فإن النقط A و J و B في نفس ترتيب النقط C و I و B

وبالتالي حسب مبرهنة طاليس العكسيـة:

$(JI)//(AC)$

II. التكبير و التصغير .

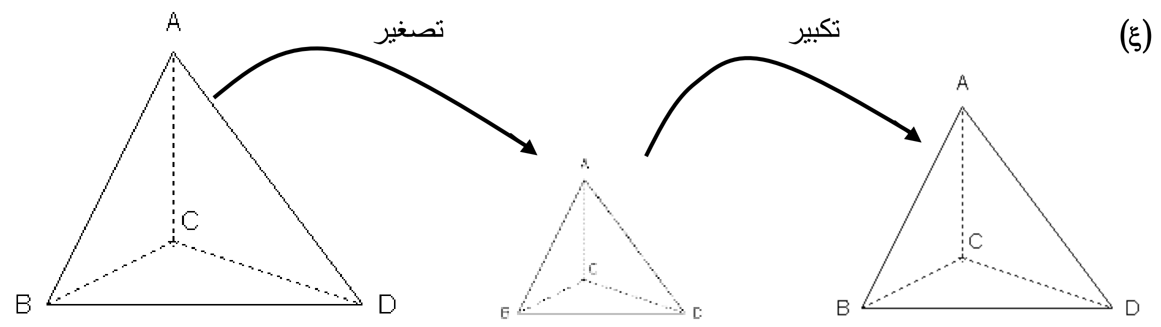
تعريف6

(ع) مجسم معلوم في الفضاء .

بضرب أبعاد المجسم (ع) في نفس العدد الحقيقي K الأكبر من 1 نقول أننا قمنا بتكبير نسبته K للمجسم (ع) .

(ع) $0 \prec K \prec 1$ K

(ع)



1- أثر التكبير و التصغير على المساحة

خاصية4

A و B شكلان هندسيان مساحتيهما هما على التوالي S و 'S .

إذا كان A تكبيرا (تصغيرا) نسبته K للشكل B فإن $S'=K^2S$.

تطبيق4

$ABCD$ شبه منحرف مساحته $S = 30cm^2$

علما أن $A'B'C'D'$ تكبيرا لـ $ABCD$

نسبته $K = 3$

أحسب S' مساحة $A'B'C'D'$.

الحل

لنحسب S' مساحة $A'B'C'D'$.

لدينا $A'B'C'D'$ تكبيرا ل $ABCD$ نسبته K

إذن $S' = K^2S$

ت . ع $S' = 3^2 \times 30$ تكافئ $S' = 9 \times 30 = 270 \ cm^2$

2– أثر التكبير و التصغير على الحجم

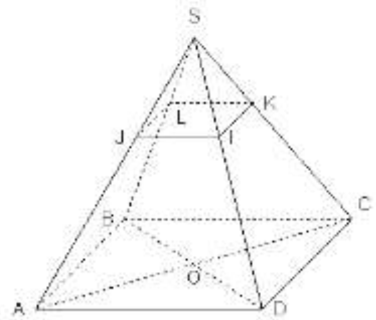
خاصية5

A و B مجسمان من الفضاء حجميهما هما على التوالي V و V' .

إذا كان A تكبيرا (تصغيرا) نسبته K للشكل B فإن $V' = K^3V$.

تطبيق5

الشكل جانبه يمثل هرما منتظما $SABCD$ إرتفاعه $[SO]$ و قاعدته $ABCD$ عبارة عن مربع بحيث : $BC = 6cm$ و $SO = 4cm$ و I و J و K و L نقط على التوالي من $[SD]$ و $[SA]$ و $[SC]$ و $[SB]$ بحيث $SJ = SK = SI = SL = \frac{1}{3}SA$



1 – بين أن $IJ = 2cm$.

2 – علما أن الهرم $SABCD$ تكبيرا للهرم $SIKLJ$. حدد نسبته .

3 – احسب حجم الهرم $SIKLJ$.

4 . إستنتج V حجم المجسم $ABCDJLKI$.

الحل

1 . لنبين أن $IJ = 2cm$

نعتبر المثلث ASD

لدينا $SJ = \frac{1}{3}SA$ يعني $\frac{SJ}{SA} = \frac{1}{3}$

و $SI = \frac{1}{3}SA = \frac{1}{3}SD$ يعني $\frac{SI}{SD} = \frac{1}{3}$

ومنه $\frac{SJ}{SA} = \frac{SI}{SD} = \frac{1}{3}$

بما أن $I \in [SD]$ و $J \in [SA]$ فإن النقط A و J و S في نفس ترتيب النقط D و I و S

وبالتالي حسب مبرهنة طاليس العكسية $(JI) // (AD)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة :

$$\frac{SJ}{SA} = \frac{SI}{SD} = \frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$$

من العلاقة $\frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$ نستنتج أن $IJ = \frac{1}{3}AD$

ت . ع $IJ = \frac{1}{3} \times 6 = 2cm$

2 – علما أن الهرم $SABCD$ تكبيرا للهرم $SIKLJ$. حدد نسبته K

لدينا الهرم $SABCD$ تكبيرا للهرم $SIKLJ$

إذن قاعدة الهرم $SABCD$ تكبيرا لقاعدة الهرم $SIKLJ$

و منه الضلع $[AB]$ تكبيرا للضلع $[IJ]$

و بالتالي $AB = K \times IJ$

يكافئ $K = \frac{AB}{IJ} = \frac{6}{2} = 3$

3 – احسب حجم الهرم SIKLJ .

لدينا الهرم SABCD تكبيرا للهرم SIKLJ

بنسبة $K = 3$

إذن $V_{SABCD} = K^3 V_{SIKLJ}$

يكافئ $\frac{1}{3}\times SO\times AB^2 = 3^3\times V_{SIKLJ}$

ت . ع $\frac{1}{3}\times 4\times 6^2 = 3^3\times V_{SIKLJ}$

يكافئ $\frac{1}{3}\times 4\times 36 = 27\times V_{SIKLJ}$

يكافئ $48 = 27\times V_{SIKLJ}$

يكافئ $\frac{1}{27}\times 48 = \frac{1}{27}\times 27\times V_{SIKLJ}$

يكافئ $V_{SIKLJ} = \frac{48}{27}cm^3$

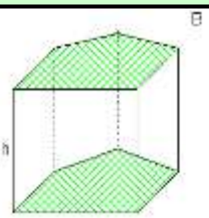
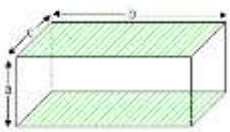
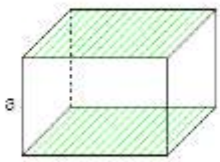
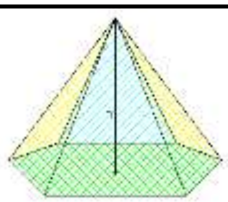
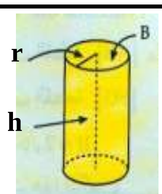
4 . استنتج V حجم المجسم ABCDJLKI

لدينا $V_{SABCD} = V + V_{SIKLJ}$

يكافئ $V = V_{SABCD} - V_{SIKLJ}$

ت . ع $V = 48 - \frac{48}{27} = \frac{1296-48}{27} = \frac{1248}{27}cm^3$

III. حســـــاب الـــحــــجـــوم .

المجســــــم	تعريفــــــــــــــــــــــــــــه	الحجم و المســـاحة الكلية
الموشور القائم	مجسم أوجهه الجانبية عبارة عن مستطيلات و له قاعدتان قابلتان للتطابق.	$V = B\times h$ $S = 2B + p\times h$ حيث B مساحة القاعدة و p محيط القاعدة 
متوازي المستطيلات	موشور قائم له قاعدتان عبارة عن مستطيلين قابلان للتطابق.	$V = a\times b\times c$  $S = 2(ab+bc+ca)$
المكعب	موشور قائم كل أوجهه عبارة عن مربعات.	$V = a^3$  $S = 6a^2$
الهرم	مجسم فضائي أوجهه الجانبية عبـارة عن مثلثات لها رأس مشترك يسمى رأس الهرم .	$V = \frac{Bh}{3}$  B : مساحة القاعدة h : إرتفاع الهرم
الأسطوانة القائمة	مجسم فضائي يولد عن دوران مستقيم حول مستقيم يوازيه له قاعدتان عبارة عن قرصان قابلان للتطابق	$V = Bh = \pi r^2 h$  $S = 2\pi r(r+h)$