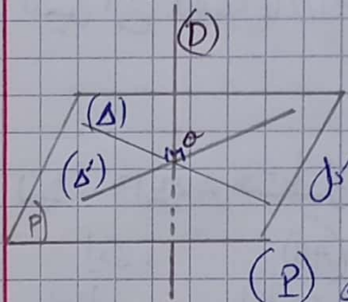
الدرس 8 : الهندسة الفضائية

I- تعامد مستقيم ومستوى :

1) تعريف :

نقول مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) في نقطة O إذا كان عموديا في النقطة O على مستقيمين ضمن (P) متقاطعين في O.

* الشكل الهندسي :



في الشكل : المستقيم (D) عمودي في النقطة O على كل المستقيمين (Δ) و (Δ') المتقاطعين ضمن المستوى (P)

إذن : $(D) \perp (P)$

بتعبير آخر

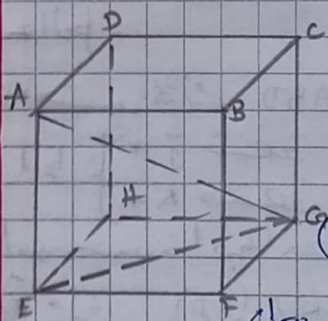
* $(D) \perp (\Delta)$ و $(D) \perp (\Delta')$ في النقطة O
* (Δ) و (Δ') ضمن المستوى (P)

إذن : $(D) \perp (P)$

* مثال :

$ABCDEFGH$ مكعب

لنبين أن $(AE) \perp (EFGH)$



لدينا $ABEF$ و $ADHF$ مربعان

إذن

* (AE) عمودي على (EF) في E
* (AE) عمودي على (EH) في E
* (EF) و (EH) ضمن المستوى $(EFGH)$ ويتقاطعان في النقطة E

إذن حسب التعريف : $(AE) \perp (EFGH)$ في E

2) خاصية : أ- خاصية 1 :

إذا كان المستقيم (D) عموديا على المستوى (P) في النقطة O، فإن المستقيم (D) عمودي على جميع المستقيمات الواقعة ضمن المستوى (P) والمارة من O

ب- مثال :

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ السابق

لنبين أن المثلث AEG قائم الزاوية في E

لدينا : $(AE) \perp (EFGH)$ في E

وبما أن المستقيم (EG) ضمن المستوى $(EFGH)$

ويقطع (AE) في E

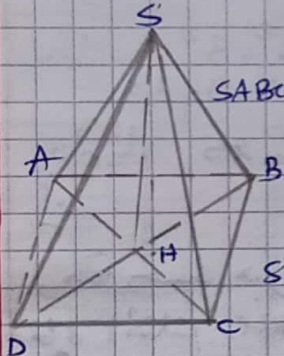
إذن حسب الخاصية 1 فإن : $(AE) \perp (EG)$

وهذا يعني أن المثلث AEG قائم الزاوية في E

3) مبرهنة فيثاغورس في الفضاء :

أ- مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

* مثال :



الشكل جانبه يمثل هرما منتظما $SABCD$ قاعدته عبارة عن مربع $ABCD$ وارتفاعه $[SH]$ بحيث

$SH = 12cm$ و $AC = BD = 12cm$

لنحسب BC و SC

⇐ حساب BC

$ABCD$ مربع إذن المثلث ABC قائم الزاوية في B

ومنه حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن

$$BC^2 + AB^2 = AC^2$$

$$BC^2 + BC^2 = AC^2$$ (لأن $AB = BC$ و $ABCD$ مربع)

$$2BC^2 = AC^2$$

$$2BC^2 = 12^2$$

$$BC^2 = \frac{144}{2}$$

$$BC^2 = 72$$

ومنه : $BC = \sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$

⇐ حساب SC

لدينا $[SH]$ ارتفاع الهرم $SABCD$

إذن $[SH]$ عمودي على مستوى القاعدة $ABCD$ في H

وبما أن (HC) ضمن $(ABCD)$

فنجد: $(SH) \perp (HC)$

ومنه فإن المثلث SHC قائم الزاوية في H

ومنه حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن:

$$SH^2 + HC^2 = SC^2$$

لأن $HC = \frac{AC}{2}$

$$SC^2 = 12^2 + 6^2$$

$$SC^2 = 144 + 36$$

$$SC^2 = 180$$

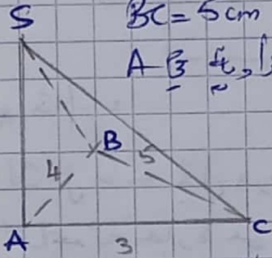
$$SC = \sqrt{180} = \sqrt{6^2 \times 5}$$

ومنه فإن: $SH = 6\sqrt{5}$

ب- مبرهنة فيتاغورس العكسية:

* مثال:

$SABC$ رباعي أوجه قاعدته المثلث ABC بحيث $AC = 3cm$ و $AB = 4cm$ و $BC = 5cm$



لنبين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A

لدينا: $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2$
$= 16 + 9 = 25$

ولدينا: $BC^2 = 5^2 = 25$

إذن: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

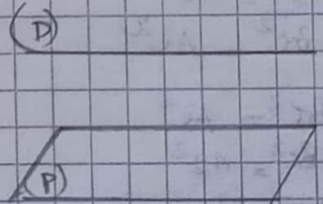
ومنه حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

II - توازي مستقيم ومستوى في الفضاء:

1) تعريف:

نقول إن مستقيم (D) يوازي مستوى (P) إذا كانا لا يشتركان في أية نقطة.

* الشكل:



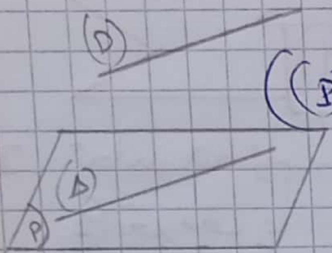
لدينا: $(D) // (P)$

2) خاصية ①

أ- خاصية ②:

(D) مستقيم و (P) مستوى في الفضاء.
يكون المستقيم (D) موازيا للمستوى (P) إذا كان يوجد ضمن (P) مستقيما موازيا للمستقيم (D)

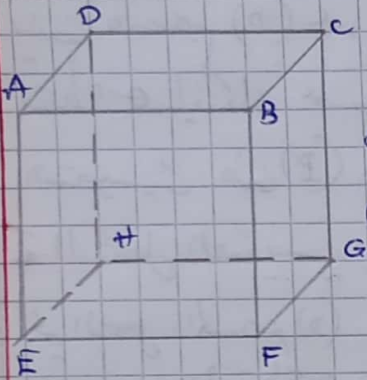
* الشكل:



* $(\Delta) \subset (P)$ ((Δ) ضمن (P))
* $(\Delta) // (D)$

إذن: $(D) // (P)$

ب- مثال:



$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات

لنبين أن $(AB) // (EFGH)$

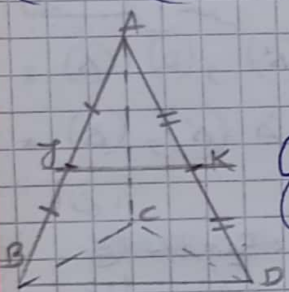
لدينا $ABEF$ مستطيل

إذن: $(EF) // (AB)$

ولدينا: $(EF) \subset (EFGH)$

إذن حسب الخاصية ②: $(AB) // (EFGH)$

ج- تمرين تطبيقي:



نعتبر الشكل جانبه بحيث J منتصف $[AB]$ و K منتصف $[AD]$

بين أن $(JK) // (BCD)$

* الحل:

نعتبر المثلث ABD

لدينا:
* J منتصف $[AB]$
* K منتصف $[AD]$

إذن حسب خاصية المستقيم المار من منتصفي ضلعين فإن: $(JK) // (BD)$

وبما أن: $(BD) \subset (BCD)$

فإنه حسب الخاصية ② فإن: $(JK) // (BCD)$

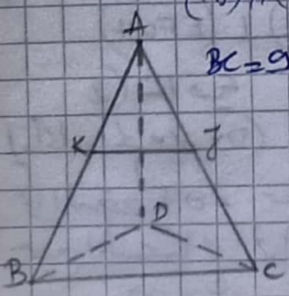
3) مبرهنة طاليس في الفضاء:

أ- الخاصية المباشرة:

* مثال:

نعتبر الهرم جانبه بحيث $(KJ) // (BC)$ و $AK = 2$ و $AB = 6$ و $BC = 9$

أحسب KJ



نعتبر المثلث ABC

لدينا $\begin{cases} * K\in[AB] \\ * J\in[AC] \end{cases}$ بحيث $(KJ)//(BC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن:

$$\frac{AK}{AB}=\frac{AJ}{AC}=\frac{KJ}{BC}$$

إذن: $\frac{AK}{AB}=\frac{KJ}{BC}$

$$\frac{2}{6}=\frac{KJ}{9}$$

$$KJ=\frac{2\times 9}{6}=\frac{18}{6}$$

وبالتالي فإن: $KJ=3$

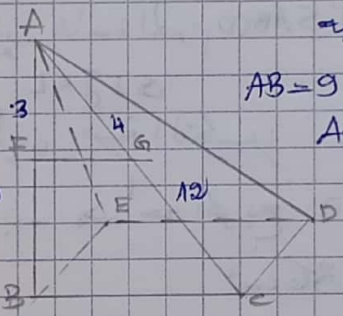
ب- الخاصية العكسية

نعتبر الشكل جانبه

بحيث: $AB=9$ و $AF=3$

$AC=12$ و $AG=4$

بين أن $(FG)//(BC)$



لدينا: * $\frac{AF}{AB}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ و $\frac{AG}{AC}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

إذن: $\frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}$

نعتبر المثلث ABC

لدينا *$F\in[AB]$ *$G\in[AC]$ النقط A و F و B لها نفس ترتيب النقط A و G و C

و $\frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}$

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن: $(FG)//(BC)$

III- التكبير والتصغير:

1) تعريف:

انطلاقا من شكل، نستخرج شكلا آخر يشابهه وذلك بضرب أبعاده في عدد حقيقي موجب k يخالف 1

2) ملاحظة:

* نحصل على شكل مكبر إذا كان $k>1$. نقول أننا قمنا بتكبير نسبته k.
* نحصل على شكل مصغر إذا كان $k<1$. نقول أننا قمنا بتصغير نسبته k.

* إذا كانت k هي نسبة التكبير $(k>1)$، فإن نسبة التصغير هي $\frac{1}{k}$

3) أثر التكبير والتصغير على المساحات والحجوم:

أ- خاصية ③:

عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء بنسبة k فإن:

← الأطوال تضرب في العدد k

← المساحات تضرب في العدد k^2

← الحجوم تضرب في العدد k^3

بتعبير آخر

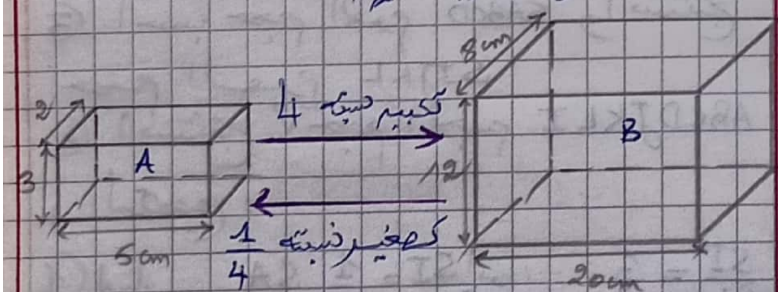
l: الطول S: المساحة V: الحجم

الشكل الأصلي	بعد تصغير أو تكبير نسبته k	الشكل المحصل عليه
l	$l'=k\times l$	l'
S	$S'=k^2\times S$	S'
V	$V'=k^3\times V$	V'

ب- مثال:

متوازي المستطيلات B هو تكبير لمتوازي المستطيلات A ونسبة التكبير هي 4

لأن الأطوال ضربت في 4



* مساحة A هي:

$$S=2(ab+ac+bc)=2(5\times3+5\times2+3\times2)=2\times31$$

$$S=62\ cm^2$$

إذن مساحة B هي:

$$S'=k^2\times S=4^2\times 62$$

$$S'=992\ cm^2$$

* حجم A هو:

$V = a\times b\times c = 5\times3\times2 = 30\,cm^3$

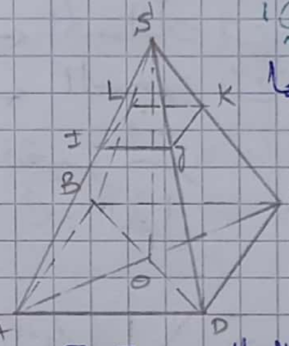
إذن حجم B هو:

$V' = k^3\times V = 4^3\times 30 = 1920\,cm^3$

* ملاحظة:

لتحديد نسبة التصغير أو التكبير، غالبا ما نستعمل مبرهنة طاليس المباشرة

4) تمرين تطبيقي:



الشكل جانبه يمثل هرما منتظما SABCD ارتفاعه [SO] وقاعدته ABCD عبارة عن مربع بحيث: $BC=6cm$ و $SO=4cm$

I و J و K و L نقط على التوالي من [SA] و [SB] و [SC] و [SD] بحيث:

$SI=SJ=SK=SL=\frac{1}{3}SA$

1) بين أن: $IJ=2cm$

2) علما أن الهرم SABCD تكبير للهرم SIJKL

أ- حدد نسبته

ب- أحسب مساحة المربع ABCD واستنتج مساحة المربع IJKL

3) احسب حجم الهرم SABCD واستنتج حجم الهرم SIJKL

4) استنتج V حجم الجسم ABCDJKLI

* التصحيح:

1) لدينا: $SI=\frac{1}{3}SA$ إذن: $\frac{SI}{SA}=\frac{1}{3}$

ولدينا: $SJ=\frac{1}{3}SA=\frac{1}{3}SD$ لأن: $SA=SD$

لأن SABCD هرم منتظم

إذن: $\frac{SJ}{SD}=\frac{1}{3}$

وهنا فإن: $\frac{SI}{SA}=\frac{SJ}{SD}=\frac{1}{3}$

نعتبر المثلث ASD

لدينا: * $I\in[AS]$ والنقط S و I و A لها نفس ترتيب النقط S و J و D
* $J\in[DS]$

ولدينا: $\frac{SI}{SA}=\frac{SJ}{SD}$

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن $(IJ)//(AD)$

وهنا حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن:

$\frac{SJ}{SD}=\frac{SI}{SA}=\frac{IJ}{AD}=\frac{1}{3}$

إذن: $\frac{IJ}{AD}=\frac{1}{3}$ أي $\frac{IJ}{6}=\frac{1}{3}$ $(AD=BC=6cm)$

$IJ=\frac{1}{3}\times 6$

وهنا فإن: $IJ=2\,cm$

2) أ- لدينا الهرم SABCD تكبير للهرم SIJKL

إذن قاعدة الهرم SABCD تكبير لقاعدة الهرم SIJKL

إذن نسبة التكبير $k=\frac{AD}{IJ}=\frac{6}{2}=3$

ب- مساحة المربع ABCD هي:

$S=AB^2=6^2=36\,cm^2$

ولدينا المربع IJKL تصغير للمربع ABCD ونسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

وهنا مساحة المربع IJKL هي:

$S'=k^2\times S=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 36=\frac{36}{9}$

$S'=4\,cm^2$

3) حجم الهرم SABCD هو:

$V=\frac{1}{3}\times SO\times AB^2=\frac{1}{3}\times 4\times 6^2=48\,cm^3$

والهرم SIJKL تصغير للهرم SABCD، ونسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

وهنا حجم الهرم SIJKL هو:

$V'=k^3\times V=\left(\frac{1}{3}\right)^3\times 48=\frac{16}{9}\,cm^3$

4) V حجم الجسم ABCDJKLI

لدينا: $V_{SABCD}=V+V_{SIJKL}$

وهنا $V=V_{SABCD}-V_{SIJKL}$

$=48-\frac{16}{9}=\frac{432-16}{9}=\frac{416}{9}$

$V=\frac{416}{9}\,cm^3$