الدرس ⑥: الترتيب والعمليات

مقارنة عددين حقيقيين

قاعدة:
* إذا كان $a-b\leqslant 0$ فإن $a\leqslant b$
* إذا كان $a-b\geqslant 0$ فإن $a\geqslant b$
لمقارنة عددين حقيقيين، نحدد إشارة فرقهما

مثال: $a=\frac{4}{35}$ و $b=\frac{2}{15}$

$a-b=\frac{4}{35}-\frac{2}{15}=\frac{12-14}{105}=\frac{-2}{105}$

بما أن $\frac{-2}{105}<0$ فإن $a-b<0$

وبالتالي $\boxed{a<b}$

الترتيب والعمليات

← الترتيب والجمع

خاصية ①
$a\leqslant b$ يعني $a+c\leqslant b+c$

خاصية ②
$\begin{cases}a\leqslant b\\ c\leqslant d\end{cases}$ يعني أن $a+c\leqslant b+d$

← الترتيب والضرب

خاصية ③
$a\leqslant b$ و $k>0$ يعني $a\times k\leqslant b\times k$
$a\leqslant b$ و $k<0$ يعني $a\times k\geqslant b\times k$
الضرب في عدد موجب لا يغير الترتيب، بينما الضرب في عدد سالب يغير الترتيب

خاصية ④
a و b و c و d أعداد موجبة
$\begin{cases}a\leqslant b\\ c\leqslant d\end{cases}$ يعني أن $a\times c\leqslant b\times d$

أمثلة

مثال ①: لنقارن $\sqrt{7}$ و $2\sqrt{2}$
لدينا $\begin{cases}\sqrt{7}^2=7\\ (2\sqrt{2})^2=8\end{cases}$ إذن $\sqrt{7}^2<(2\sqrt{2})^2$
بما أن $\sqrt{7}<2\sqrt{2}$ فإن $\sqrt{7}<2\sqrt{2}$

مثال ②: لنقارن $-3\sqrt{2}$ و $-2\sqrt{5}$
لدينا $(-2\sqrt{5})^2=20$
$(-3\sqrt{2})^2=18$
إذن $(-3\sqrt{2})^2<(-2\sqrt{5})^2$
وبالتالي $-3\sqrt{2}>-2\sqrt{5}$
لأن العددان $-2\sqrt{5}$ و $-3\sqrt{2}$ سالبان

الترتيب والمقلوب

خاصية ⑤
a و b موجبان
$a\leqslant b$ يعني أن $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$ المقلوب يغير الترتيب

الترتيب والمربع والجذر المربع

خاصية ⑥
a و b موجبان
* $a^2\leqslant b^2$ يعني أن $a\leqslant b$
* $\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}$ يعني أن $a\leqslant b$

التأطير

تأطير المجموع

$\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d\end{cases}$ يعني $a+c\leqslant x+y\leqslant b+d$

تأطير المقابل

$a\leqslant x\leqslant b$ يعني $-b\leqslant -x\leqslant -a$

تأطير فرق

$\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d\end{cases}$ يعني $a-d\leqslant x-y\leqslant b-c$

لدينا $a-b=a+(-b)$ إذن لتأطير فرق نأطر أولا $-b$ ثم نطبق خاصية المجموع.

تأطير جداء

نعتبر جميع الأعداد موجبة

$\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d\end{cases}$ يعني أن $a\times c\leqslant x\times y\leqslant b\times d$

يجب أن تكون جميع الأعداد موجبة. إذا كان الأعداد المؤطرة سالبة، نأطر المقابل لتصبح موجبة

تأطير مقلوب

$a\leqslant x\leqslant b$ يعني أن $\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{a}$

تأطير خارج

نعتبر جميع الأعداد موجبة

$\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d\end{cases}$ إذن $\frac{a}{d}\leqslant\frac{x}{y}\leqslant\frac{b}{c}$

لدينا $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$، لتأطير $\frac{a}{b}$ نأطر أولا $\frac{1}{b}$ ثم نطبق خاصية الجداء

مثال

$2\leqslant x\leqslant 3$ و $-4\leqslant y\leqslant -3$

تأطير $x+y$:
$2\leqslant x\leqslant 3$
$-4\leqslant y\leqslant -3$
$2+(-4)\leqslant x+y\leqslant 3+(-3)$
$\boxed{-2\leqslant x+y\leqslant 0}$

تأطير $x-y$:
$-4\leqslant -y\leqslant -3$
$3\leqslant -y\leqslant 4$
$2+3\leqslant x-y\leqslant 3+4$
$\boxed{5\leqslant x-y\leqslant 7}$

تأطير xy:
$2\leqslant x\leqslant 3$
$3\leqslant -y\leqslant 4$
$6\leqslant x\times(-y)\leqslant 12$
$\boxed{-12\leqslant xy\leqslant -6}$

تأطير $\frac{x}{y}$:
$-4\leqslant y\leqslant -3$
$-\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{y}\leqslant-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}\leqslant-\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{3}$
$2\times\frac{1}{4}\leqslant 2\times(-\frac{1}{y})\leqslant 3\times\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}\leqslant-\frac{x}{y}\leqslant 1$
$\boxed{-1\leqslant\frac{x}{y}\leqslant-\frac{1}{2}}$