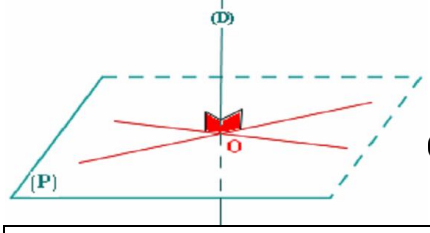
الهندسة الفضائية:حساب الحجوم – تكبير و تصغير

I. تعامد مستقيم و مستوى:

تعريف: يكون مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) في نقطة O،إذا كان (D) عموديا على مستقيمين من (P) متقاطعين في O.

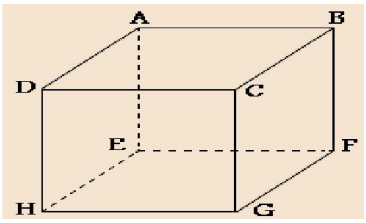


في الشكل جانبه: المستقيم (D) عمودي في النقطة O على المستقيمين (L) و(K) المتقاطعين ضمن المستوى (P)

إذن (D)⊥(P)

خاصية: إذا كان المستقيم (D) عموديا على المستوى (P) في النقطة O، فإن المستقيم (D) عمودي على جميع المستقيمات الواقعة ضمن المستوى (P) و المارة من O.

مثال: ABCDEFGH متوازي المستطيلات:



1. بين أن (CG)⊥(EFGH)
2. استنتج أن (CG)⊥(GE)

التصحيح:

1. لدينا CGFB ..... إذن (....)⊥(CG).

ولدينا CGHD ..... إذن (....)⊥(CG).

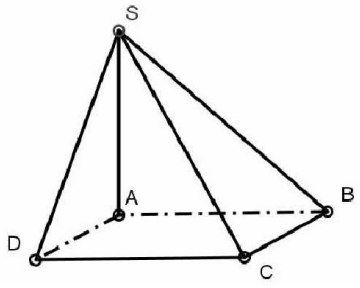
و بما أن (....) و (....) متقاطعان ضمن المستوى (.....)

إذن (.....)⊥(CG).

2. بما أن (CG) عمودي على المستوى (.....) و المستقيم (.....) موجود ضمن المستوى (.....) فإن (....)⊥(CG).

تمرين:

SABCD هرم رباعي القاعدة حيث المثلثان SAB و SAD قائما الزاوية في A.



-1 بين أن (SA)⊥(ABCD)

ماذا نسمي المستقيم (SA)؟

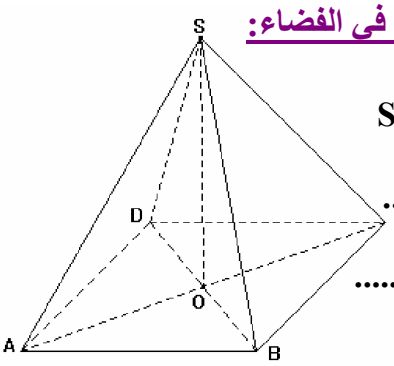
-2 استنتج أن(AC)⊥(SA)

II. تطبيق مبرهنة فيتاغورس في الفضاء:

نعتبر هرما منتظما SABCD

بحيث : $AB = 3\sqrt{2}$ و SA= 5

لنحسب AC :



لدينا SABCD .....

إذن قاعدته ABCD .....

ومنه المثلث .....

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس .....

ت.ع ..... و منه ..... =AC

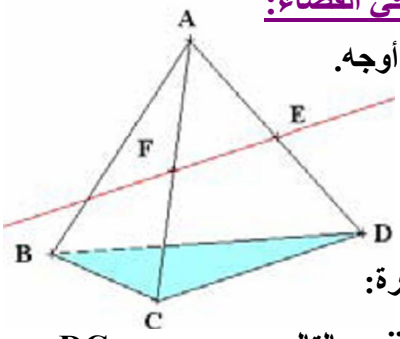
لنحسب SO : أولا نبين أن المثلث ASO قائم الزاوية في O

لدينا (SO) ارتفاع للهرم SABCD إذن (.....)⊥(SO)و

بما أن (.....) ⊂ (AO) فإن (....)⊥(.....) و منه المثلث ASOقائم الزاوية في O.إذن حسب مبرهنة فيتاغورس

..... ومنه .....

II. تطبيق مبرهنة طاليس في الفضاء:



في الشكل جانبه ABCD رباعي أوجه.

في المستوى (ADC) لدينا

E∈[AD] و F∈[AC] بحيث

(EF)//(DC) حيث AE=3

و AD=9 و EF=2 أحسب DC

لدينا حسب خاصية طاليس المباشرة:

$\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{DC}$ ومنه $\frac{3}{9} = \frac{AF}{AC} = \frac{2}{DC}$ و بالتالي DC=.....

III. التكبير و التصغير:

تعريف: انطلاقا من شكل، نستخرج شكلا آخر يشابهه و ذلك بضرب أبعاده في عدد حقيقي موجب قطعا k و يخالف 1.

ملاحظات:

نحصل على شكل مكبر إذاكان $k > 1$. نقول إننا قمنا بتكبير نسبته k

نحصل على شكل مصغر إذاكان $k < 1$. نقول إننا قمنا بتصغير نسبته k

- ***أثر التكبير و التصغير على المساحات و الحجوم:***

قاعدة: عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء:

إذا ضربنا الأبعاد في عدد k فإن :

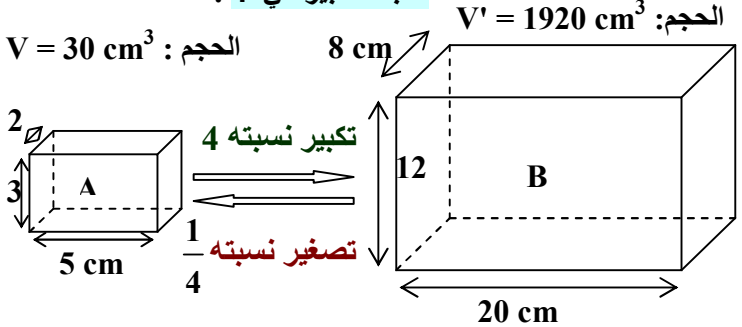
★المساحات تضرب في k^2 .

★و الحجوم تضرب في k^3 .

ليكن B هو المجسم الناتج عن تكبير أو تصغير نسبته k لمجسم A

- إذا كان a هو طول حرف في المجسم A ، و كان a' هو طول الحرف الموافق له في المجسم B فإن : $a' = a \times k$ ومنه $k = \frac{a'}{a}$
- إذا كانت S هي مساحة المجسم A ، و كانت S' هي مساحة المجسم B فإن $S' = S \times k^2$ و منه $k^2 = \frac{S'}{S}$
- إذا كان V هو حجم المجسم A ، و كان V' هو حجم المجسم B فإن $V' = V \times k^3$ و منه $k^3 = \frac{V'}{V}$

مثال: متوازي المستطيلات B هو تكبير لمتوازي المستطيلات A نسبة التكبير هي 4 :



المجسم B هو تكبير للمجسم A نسبة التكبير هي 4.

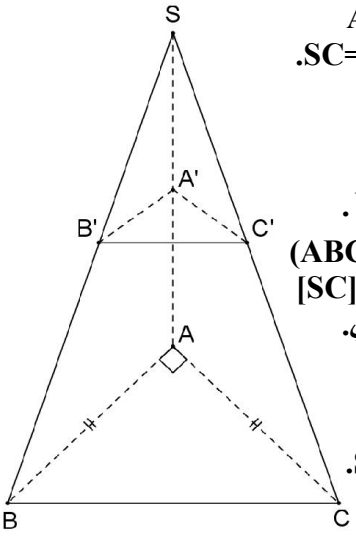
- حصلنا على أطوال المجسم B بضرب أطوال المجسم A في العدد .....
- نضرب S مساحة المجسم A في ..... فنحصل على 'S مساحة B
- نضرب V حجم المجسم A في ..... فنحصل على 'V حجم B:

$V' = V \times ..... = 30 \times .... = 1920\ cm^3$

تمارين في الهندسة الفضائية

التمرين1:

SABC رباعي أوجه ارتفاعه [SA] و قاعدته المثلث ABC القائم الزاوية و المتساوي الساقين في A بحيث : AB=2cm و SC=7cm.



1) – بين أن : $SA = 3\sqrt{5}\ cm$.

2) – ليكن V حجم الهرم SABC .

بين أن : $V = 2\sqrt{5}\ cm^3$.

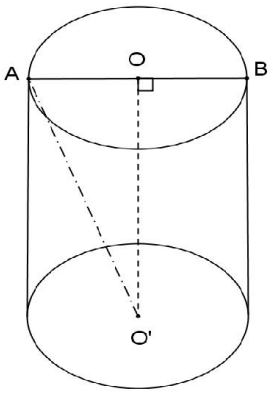
3)– نعتبر مستوى مواز للمستوى (ABC) و يقطع الأضلاع [SA] و [SB] و [SC] في النقط A' و B' و C' على التوالي.

بحيث : $SA' = \frac{\sqrt{5}}{5}SA$.

أحسب : V' حجم الهرم SA'B'C'.

التمرين2:

يمثل الشكل جانبه أسطوانة قائمة بحيث قطر قاعدتها AB = 2 cm و ارتفاعها h = 10cm



أ) -- أحسب المسافة AO' .

ب) -- أحسب V حجم الأسطوانة .

ت) -- أحسب S_L المساحة الجانبية للأسطوانة.

ج)-- أحسب V' و S'_L الحجم و المساحة الجانبية للاسطوانة المحصل عليها عند تكبير أبعاد هذه الاسطوانة بنسبة 2.

التمرين3:

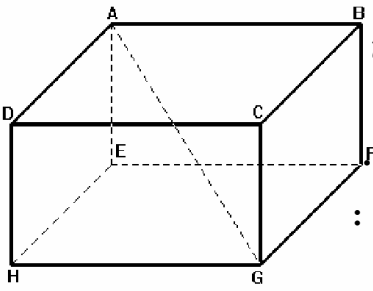
حجرة دراسية على شكل متوازي مستطيلات قائم ABCDEFGH أبعاده AB = 6m و AE = 3m و AD=2m

1) --- أ) -- بين أن المثلث AEG قائم الزاوية في E .

ب) -- بين أن : AG =7 m

2)- أ)- أحسب V حجم الحجرة

ب)-- تم إنجاز نموذج مصغر للحجرة نسبته $\frac{1}{10}$



بين أن حجم هذا النموذج هو : $v' = 3,6\times10^{-2}\ cm^3$

التمرين4:

SABCD هرم قاعدته المستطيل ABCD، حيث أن (SB) عمودي على كل من (AB) و (BC) ،

و أن : AB=3cm و BC=9cm و SB=6cm.

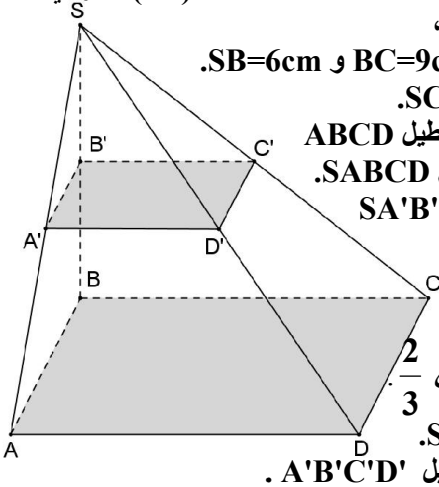
1) --- أ) -- أحسب المسافة SC.

ب)-- أحسب مساحة المستطيل ABCD

ثم أحسب V حجم الهرم SABCD.

2) – نعتبر أن الهرم SA'B'C'D' هو تصغير للهرم SABCD

و أن $V' = 16\ cm^3$.



أ) - بين أن نسبة التصغير هي $\frac{2}{3}$.

ب) -- أحسب المسافة : SB'.

ج) -- أحسب مساحة المستطيل A'B'C'D' .

التمرين5:

SABCD هـ ما قاعـ ته مستـ يل حيـ لمثلـ SBC قائـ لـ يـة في B بحيث: AB=4cm و AD=3cm و SB=12cm و SD=13cm

1)– بيـ : DB=5cm

2) –)-بيـ SBD قائـ لـ يـة في B

) ستنتج $(SB)\perp(ABCD)$

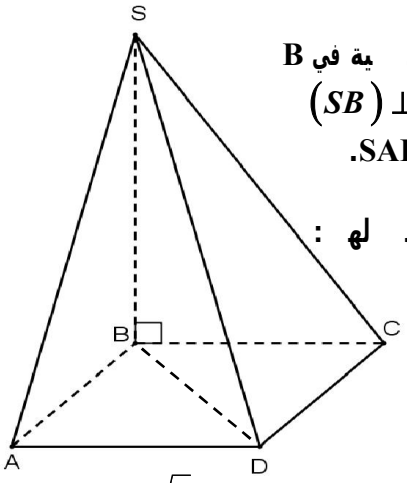
3) - ليكـ V حجـ لهـ SABCD.

– بيـ $V= 48cm^3$.

4) – قمنا بتكبير بنسبته 10 لهـ لهـ :

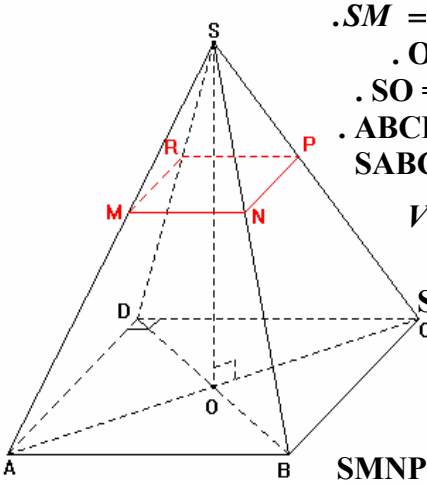
) -- حسـ h' تفا لهـ لمحصل عليه.

) - حسـ V' حجـ لهـ لمحصل عليه .



التمرين6:

في الشكـل جانبه SABCD هرم منتظم بحيث $AB = 3\sqrt{2}\ cm$ و $SA = 5\ cm$ و $SM = 2\ cm$.



1)- أ)- تحقق أن $OA = 3\ cm$.

ب)- استنتج أن : $SO = 4\ cm$.

ج)- أحسب مساحة المربع ABCD .

د)– بين ان حجم الهرم SABCD هو $V_{SABCD} = 24cm^3$

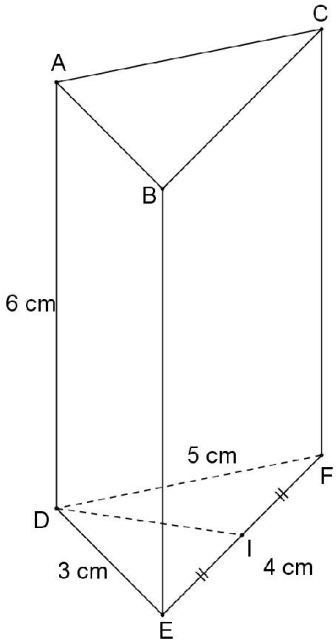
2)- نعتبر أن الهرم SMNPR يمثل تصغيرا للهرم SABCD

أ)- تحقق أن نسبةهي $\frac{2}{5}$

ب)- استنتج مساحة المربع MNPR و حجم الهرم SMNPR

التمرين7:

في الشكل جانبه ABCDEF موشور قائم



1)– أ) - بين DEF قائم الزاوية في E.

ب)- لتكن I منتصف القطعة [EF].

أحسب : DI.

2)– بن أن : $(AD)\perp(DI)$

3) بين أن حجم ABCDEF هو: $V = 36\ cm^3$.

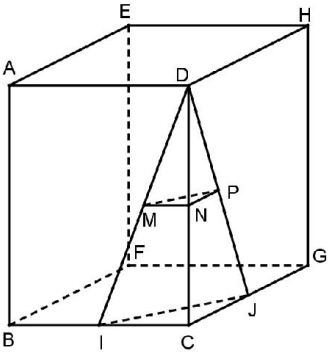
4)– قمنا بتكبير ABCDEF فحصلنا على موشور قائم مساحة قاعدته هي 24cm²

أ) -- حدد نسبة التكبير.

ب) -- أحسب حجم الموشور القائم المحصل عليه بعد التكبير.

التمرين8:

نعتبر في الفضاء مكعبا ABCDEFGH بحيث: AB = 4.



لتكن I و J و M و N و P منتصفات القطع [BC] و[CG] و [DI] و[DC] و[DJ] على التوالي .

1) أحسب حجم ABCDEFGH

ثم أحسب حجم رباعي الأوجه DCIJ

2) - بين أن: (IC) // (MN)

واحسب MN

3) - أحسب DM .

4) - نقبل أن رباعي الأوجه DNMP تصغير لرباعي الأوجه DCIJ .

حدد نسبة التصغير و احسب حجم رباعي الأوجه DNMP.