

الحساب المثلثي

تمرين 1

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث $AB=8$ و $AC=6$ ، I منتصف $[AB]$ و E مسقطها العمودي على (BC)

① احسب BC ثم $\cos(\hat{A}BC)$

② احسب $\cos(\hat{A}BC)$ بطريقة أخرى ثم استنتج حساب EB

③ احسب EC و IE

تمرين 2

ABC مثلث حيث $AB=8$ و $\hat{B}AC=30^\circ$ و $\hat{B}CA=45^\circ$. و لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على (AC)

◇ احسب في هذا الترتيب المسافات : AH و BH و BC و CH و AC

تمرين 3

α قياس زاوية حادة غير منعدمة حيث $\sin(\alpha)=\frac{3}{5}$. احسب $\cos(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$

تمرين 4

β قياس زاوية حادة غير منعدمة حيث $\tan(\beta)=\frac{\sqrt{5}}{2}$. احسب $\sin(\alpha)$ و $\cos(\alpha)$

تمرين 5

α قياس زاوية حادة غير منعدمة. بسط التعابير :

$$B = \frac{\sin^4(\alpha) - \cos^4(\alpha)}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)} \quad , \quad A = (\cos(\alpha) + \sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))^2$$

$$C = \cos(17^\circ) + 3\cos^2(20^\circ) + \sin^2(60^\circ) - \sin(73^\circ) + 3\cos^2(70^\circ) + \frac{1}{\tan^2(30^\circ)}$$

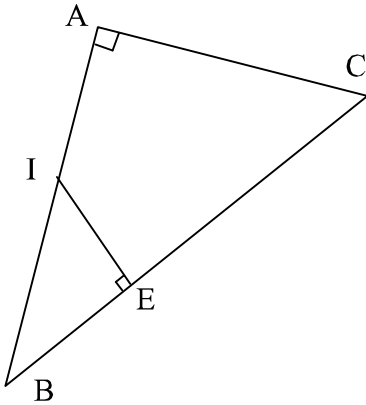
تمرين 6

x قياس زاوية حادة غير منعدمة. حدد قيمة x إذا علمت أن : $2\sin(x) - \tan(x) = 0$

الحساب المثلثي-حلول

تمرين 1

انتبه انتبه تعليق



① لنحسب BC ثم $\cos(\hat{A}BC)$

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :
 $BC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$ منه $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$$\text{منه : } \cos(\hat{A}BC) = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

② لنحسب $\cos(\hat{A}BC)$ بطريقة أخرى ثم نحسب EB

لدينا في المثلث القائم الزاوية IEB : $\cos(\hat{A}BC) = \frac{BE}{BI}$

نستنتج إذن حسب السؤال السابق أن : $\frac{BE}{BI} = \frac{4}{5}$ أي : $\frac{BE}{4} = \frac{4}{5}$

$$BE = \frac{4 \times 4}{5} = \frac{16}{5} \text{ : بالتالي (لأن } BI = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{)}$$

③ لنحسب IE و EC

$$\text{لدينا : } EC = BC - BE = 10 - \frac{16}{5} = \frac{50 - 16}{5} = \frac{34}{5}$$

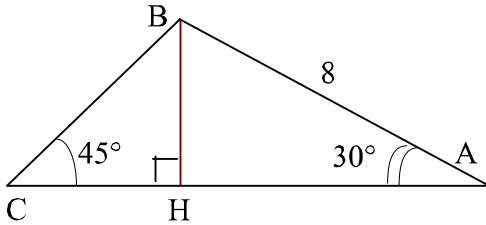
لحساب IE نحسب $\sin(\hat{A}BC)$ بطريقتين : لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC : $\sin(\hat{A}BC) = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

لدينا في المثلث القائم الزاوية IEB : $\sin(\hat{A}BC) = \frac{IE}{BI}$ منه : $\frac{IE}{BI} = \frac{3}{5}$ أي : $\frac{IE}{4} = \frac{3}{5}$ بالتالي : $IE = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$

يمكن استعمال مبرهنة فيثاغورس المباشرة أيضا لحساب IE .

تمرين 2

انتبه انتبه تعليق



① لنحسب AH

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH : $\cos(\hat{H}AB) = \frac{AH}{AB}$

وبما أن : $\hat{H}AB = 30^\circ$ و نحن نعلم أن : $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{فإن : } \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ أي : } \frac{AH}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ بالتالي : } AH = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

② لنحسب BH

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH : $\sin(\hat{H}AB) = \frac{BH}{AB}$

وبما أن : $\hat{H}AB = 30^\circ$ و نحن نعلم أن : $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$

$$\text{فإن : } \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \text{ أي : } \frac{BH}{8} = \frac{1}{2} \text{ بالتالي : } BH = \frac{8}{2} = 4$$

③ لنحسب BC

لدينا في المثلث القائم الزاوية BCH : $\sin(\hat{B}CH) = \frac{BH}{BC}$

وبما أن : $\hat{B}CH = 45^\circ$ و نحن نعلم أن : $\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{فإن : } \frac{BH}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أي : } \frac{4}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{بالتالي : } BC = \frac{2 \times 4}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \times \sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

④ لنحسب CH

لدينا في المثلث BCH : $\hat{C}BH = 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) = 45^\circ$

إذن فهو متساوي الساقين و منه : $CH = BH = 4$

⑤ لنحسب AC

$$\text{لدينا : } AC = CH + AH = 4 + 4\sqrt{3}$$

تمرين 3

انتبه ←

تعليق ←

معطيات : $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$

② لنحسب $Tan(\alpha)$	① لنحسب $Cos(\alpha)$
نعلم أن : $Tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$	نعلم أن : $Cos^2(\alpha) + Sin^2(\alpha) = 1$ إذن : $Cos^2(\alpha) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$ منه : $Cos^2(\alpha) + \frac{9}{25} = 1$ منه : $Cos^2(\alpha) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$ و حيث أننا نعلم أن : $Cos(\alpha) > 0$ فإن : $Cos(\alpha) = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

تمرين 4

انتبه ←

تعليق ←

معطيات : $Tan(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{2}$

① لنحسب $Sin(\alpha)$ و $Cos(\alpha)$
نعلم أن : $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ إذن : $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ منه $\frac{\sin \alpha}{5} = \frac{\cos \alpha}{2}$ منه $\frac{(\sin \alpha)^2}{5} = \frac{(\cos \alpha)^2}{4}$ نستنتج إذن أن : $\frac{(\sin \alpha)^2}{5} = \frac{(\cos \alpha)^2}{4} = \frac{(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2}{5+4} = \frac{1}{9}$ منه $\frac{(\sin \alpha)^2}{5} = \frac{1}{9}$ و $\frac{(\cos \alpha)^2}{4} = \frac{1}{9}$ منه $(\cos \alpha)^2 = \frac{4}{9}$ وبالتالي $\cos \alpha = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ و $(\sin \alpha)^2 = \frac{5}{9}$ منه $\sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ وبالتالي $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و $\cos \alpha = \frac{2}{3}$
هناك طرق أخرى لحساب $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$. لاحظ أن هذه الطريقة تعتمد على قواعد التناسب و قواعد النسب المثلثية.

تمرين 5

انتبه ←

تعليق ←

① لنسب :

$A = (Cos(\alpha) + Sin(\alpha))^2 + (Cos(\alpha) - Sin(\alpha))^2 = Cos^2(\alpha) + 2 \times Cos(\alpha) \times Sin(\alpha) + Sin^2(\alpha) + Cos^2(\alpha) - 2 \times Cos(\alpha) \times Sin(\alpha) + Sin^2(\alpha)$ $A = Cos^2(\alpha) + Sin^2(\alpha) + Cos^2(\alpha) + Sin^2(\alpha) = 1 + 1 = 2$ $B = \frac{Sin^4(\alpha) - Cos^4(\alpha)}{Sin(\alpha) + Cos(\alpha)} = \frac{(Sin^2(\alpha) - Cos^2(\alpha)) \times (Sin^2(\alpha) + Cos^2(\alpha))}{Sin(\alpha) + Cos(\alpha)} = \frac{Sin^2(\alpha) - Cos^2(\alpha)}{Sin(\alpha) + Cos(\alpha)} = \frac{(Sin(\alpha) - Cos(\alpha)) \times (Sin(\alpha) + Cos(\alpha))}{Sin(\alpha) + Cos(\alpha)}$ $B = Sin(\alpha) - Cos(\alpha)$ $C = Cos(17^\circ) + 3 \cos^2(20^\circ) + Sin^2(60^\circ) - \sin(73^\circ) + 3Cos^2(70^\circ) + \frac{1}{\tan^2(30^\circ)}$ $C = Cos(17^\circ) + 3 \cos^2(20^\circ) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - Cos(17^\circ) + 3Sin^2(20^\circ) + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$ $C = Cos(17^\circ) - Cos(17^\circ) + 3(\cos^2(20^\circ) + \sin^2(20^\circ)) + \frac{3}{4} + \frac{1}{\frac{1}{3}}$ $C = 0 + 3 \times 1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{3} = 3 + \frac{3}{4} + 3 = 6 + \frac{3}{4} = \frac{24+3}{4} = \frac{27}{4}$
لاحظ أن التبسيط اعتمد على تطبيق الخاصية $Cos^2(\alpha) + Sin^2(\alpha) = 1$ و على المتطابقات الهامة.

معطيات : $2 \sin(x) - \tan(x) = 0$ و $0 < x < 90^\circ$

① لنحدد قيمة x

لدينا : $2 \sin(x) - \tan(x) = 0$ منه : $2 \sin(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$ منه : $\sin(x) \left(2 - \frac{1}{\cos(x)} \right) = 0$

إذن : $\sin(x) = 0$ أو $2 - \frac{1}{\cos(x)} = 0$ ، و لكن لدينا حسب المعطيات $0 < x < 90^\circ$ أي أن $\sin(x) > 0$

إذن : $2 - \frac{1}{\cos(x)} = 0$ منه : $2 = \frac{1}{\cos(x)}$ منه : $2 \cos(x) = 1$ منه : $\cos(x) = \frac{1}{2}$

و بالتالي : $x = 60^\circ$

🔍 ← لاحظ أن إيجاد العدد x يعتمد على إيجاد إحدى نسبه المثلثية ثم استعمال جدول قيم النسب المثلثية الخاصة لتحديد قيمته.