سلسلة 3 للترتيب والعمليات

تمرين 1 :

a و b عددان حقيقيان أطر $a+b$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ- $1 \leq a \leq 2$ و $6 \leq b \leq 8$

ب- $3 \leq a \leq 5$ و $-3 \leq b \leq 1$

ت- $0 \leq a \leq 10$ و $-6 \leq b \leq -2$

تمرين 2 :

a و b عددان حقيقيان أطر $a-b$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ- $1 \leq a \leq 2$ و $6 \leq b \leq 8$

ب- $3 \leq a \leq 5$ و $-3 \leq b \leq 1$

ت- $0 \leq a \leq 10$ و $-6 \leq b \leq -2$

تمرين 3 :

a و b عددان حقيقيان أطر $a \times b$ في كل حالة من الحالات التالية :

a) $3 \leq a \leq 6$ و $2 \leq b \leq 4$

b) $2 \leq a \leq 3$ و $-5 \leq b \leq -1$

c) $-4 \leq a \leq -1$ و $-5 \leq b \leq -3$

تمرين 4 :

x عدد حقيقي أطر x^2 في كل حالة :

a) $2 \leq x \leq 5$

b) $-4 \leq x \leq -1$

b عدد حقيقي أطر $3b$ في كل حالة :

c) $2 \leq b \leq 5$

d) $-4 \leq b \leq -1$

y عدد حقيقي أطر $-3y$ في كل حالة :

e) $2 \leq y \leq 5$

f) $-4 \leq y \leq -1$

a عدد حقيقي أطر $\frac{1}{a}$ في كل حالة :

g) $2 \leq a \leq 5$

h) $-4 \leq a \leq -1$

تمرين 5 :

a و b عددان حقيقيان أطر $\frac{a}{b}$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ- $6 \leq a \leq 8$ و $1 \leq b \leq 2$

ب- $-10 \leq a \leq -4$ و $1 \leq b \leq 2$

ت- $-12 \leq a \leq -9$ و $-3 \leq b \leq -1$

حل سلسلة 3 للترتيب والعمليات

تمرين 1 :

a و b عددان حقيقيان أطر $a+b$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ- $1 \leq a \leq 2$ و $6 \leq b \leq 8$

$$1 \leq a \leq 2$$
$$6 \leq b \leq 8$$
$$1+6 \leq a+b \leq 2+8$$
$$7 \leq a+b \leq 10$$

ب- $3 \leq a \leq 5$ و $-3 \leq b \leq 1$

$$3 \leq a \leq 5$$
$$-3 \leq b \leq 1$$
$$3+(-3) \leq a+b \leq 5+1$$
$$3-3 \leq a+b \leq 6$$
$$0 \leq a+b \leq 6$$

ت- $0 \leq a \leq 10$ و $-6 \leq b \leq -2$

$$0 \leq a \leq 10$$
$$-6 \leq b \leq -2$$
$$0-6 \leq a+b \leq 10-2$$
$$-6 \leq a+b \leq 8$$

تمرين 2 :

a و b عددان حقيقيان أطر $a-b$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ- $1 \leq a \leq 2$ و $6 \leq b \leq 8$

نأطر أولاً $-b$: لدينا $6 \leq b \leq 8$

$$-8 \leq -b \leq -6$$
$$1 \leq a \leq 2$$
$$1-8 \leq a-b \leq 2-6$$
$$-7 \leq a-b \leq -4$$

ب- $3 \leq a \leq 5$ و $3 \leq b \leq 1$

لدينا $3 \leq b \leq 1$

$$-1 \leq -b \leq -3$$
$$3 \leq a \leq 5$$
$$3-1 \leq a-b \leq 5+3$$
$$2 \leq a-b \leq 8$$

ت- $0 \leq a \leq 10$ و $-6 \leq b \leq -2$

لدينا $-6 \leq b \leq -2$

$$2 \leq -b \leq 6$$
$$0 \leq a \leq 10$$
$$0+2 \leq a-b \leq 10+6$$
$$2 \leq a-b \leq 16$$

تمرين 3 :

a و b عددان حقيقيان أطر $a \times b$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ- $3 \leq a \leq 6$ و $2 \leq b \leq 4$

$$3 \leq a \leq 6$$
$$2 \leq b \leq 4$$
$$3 \times 2 \leq a \times b \leq 6 \times 4$$
$$6 \leq a \times b \leq 24$$

ب- $2 \leq a \leq 3$ و $-5 \leq b \leq -1$

$$-5 \leq b \leq -1$$
$$1 \leq -b \leq 5$$
$$2 \leq a \leq 3$$
$$2 \times 1 \leq a \times (-b) \leq 3 \times 5$$
$$2 \leq -a \times b \leq 15$$
$$-15 \leq a \times b \leq -2$$

ت- $-4 \leq a \leq -1$ و $-5 \leq b \leq -3$

$$-4 \leq a \leq -1$$
$$1 \leq -a \leq 4$$
$$-5 \leq b \leq -3$$
$$3 \leq -b \leq 5$$
$$1 \times 3 \leq (-a) \times (-b) \leq 4 \times 5$$
$$3 \leq a \times b \leq 20$$

تمرين 4 :

x عدد حقيقي أطر x^2 في كل حالة :

a) $2 \leq x \leq 5$

$$2 \leq x \leq 5$$
$$2^2 \leq x^2 \leq 5^2$$
$$4 \leq x^2 \leq 25$$

b) $-4 \leq x \leq -1$

$$-4 \leq x \leq -1$$
$$1 \leq -x \leq 4$$
$$1^2 \leq (-x)^2 \leq 4^2$$
$$1 \leq x^2 \leq 16$$

c) $2 \leq b \leq 5$

$$2 \leq b \leq 5$$
$$3 \times 2 \leq 3 \times b \leq 3 \times 5$$
$$6 \leq 3b \leq 15$$

d) $-4 \leq b \leq -1$

$$-4 \leq b \leq -1$$
$$3 \times (-4) \leq 3 \times b \leq 3 \times (-1)$$
$$-12 \leq 3b \leq -3$$

e) $2 \leq y \leq 5$

$$2 \leq y \leq 5$$
$$3 \times 2 \leq 3 \times y \leq 3 \times 5$$
$$6 \leq 3y \leq 15$$
$$-15 \leq 3y \leq -6$$

f) $2 \leq y \leq 5$

$$-4 \leq y \leq -1$$
$$3 \times (-4) \leq 3 \times y \leq 3 \times (-1)$$
$$-12 \leq 3y \leq -3$$
$$3 \leq -3y \leq 12$$

g) $2 \leq a \leq 5$

$$2 \leq a \leq 5$$
$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2}$$

h) $-4 \leq a \leq -1$

$$2 \leq a \leq 5$$
$$\frac{1}{-1} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{-4}$$
$$-1 \leq \frac{1}{a} \leq -\frac{1}{4}$$

تمرين 5 :

a و b عددان حقيقيان أطر $\frac{a}{b}$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ- $6 \leq a \leq 8$ و $1 \leq b \leq 2$

لدينا $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

نأطر أولاً : $\frac{1}{b}$

$$1 \leq b \leq 2$$
$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} \leq 1$$
$$6 \leq a \leq 8$$
$$6 \times \frac{1}{2} \leq a \times \frac{1}{b} \leq 8 \times 1$$
$$3 \leq \frac{a}{b} \leq 8$$

ب- $-10 \leq a \leq -4$ و $1 \leq b \leq 2$

$$1 \leq b \leq 2$$
$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} \leq 1$$
$$-10 \leq a \leq -4$$
$$4 \leq -a \leq 10$$
$$4 \times \frac{1}{2} \leq -a \times \frac{1}{b} \leq 10 \times 1$$
$$2 \leq -\frac{a}{b} \leq 10$$
$$-10 \leq \frac{a}{b} \leq -2$$

ت- $-12 \leq a \leq -9$ و $-3 \leq b \leq -1$

$$-3 \leq b \leq -1$$
$$\frac{1}{-1} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{-3}$$
$$-1 \leq \frac{1}{b} \leq -\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{b} \leq 1$$
$$-12 \leq a \leq -9$$
$$9 \leq -a \leq 12$$
$$9 \times \frac{1}{3} \leq (-a) \times \left(-\frac{1}{b}\right) \leq 12 \times 1$$
$$3 \leq \frac{a}{b} \leq 12$$

سلسلة 4 للترتيب والعمليات

1) إذا علمت أن $x < -2$ قارن بين 13 و $-5x + 3$

2) a و b عددان حقيقيان بين أن $a^2 + b^2 \geq 2ab$

3) بين أن $a^2 - 12a \geq -36$ بحيث a عدد حقيقي

4) a و b عددان حقيقيان بحيث $a = b - 3$ قارن a و b

5) x و y عددان حقيقيان بحيث $x - 1 = y - 1$ قارن x و y

6) a و b عددان حقيقيان موجبان قطعاً. بين أن : $\frac{a^2+b^2}{2ab} \geq 1$

7) x عدد حقيقي موجب قطعاً. بين أن : $x + \frac{1}{x} \geq 2$

8) x عدد حقيقي بحيث $x \leq 5$. بين أن : $\frac{1-x}{4} \geq -1$

9) a عدد حقيقي بحيث $a \geq -2$. بين أن : $\frac{-3a+4}{5} \leq 2$

10) x عدد حقيقي . بين أن : $(x + 5)^2 \geq 20x$

11) علماً أن $1 \leq \sqrt{3} \leq 2$ أطر $\sqrt{7 + 2\sqrt{3}}$

12) علماً أن $-5 \leq 2a - 3 \leq 1$ أطر a

13) أ- قارن العددين : $\sqrt{3} + \sqrt{15}$ و $2\sqrt{15}$

ب- علماً أن : $1 < \sqrt{3} < 2$ و $3 < \sqrt{15} < 4$ أطر $\sqrt{3} + \sqrt{15}$ و $\sqrt{3} - \sqrt{15}$

ج- بين أن $\sqrt{3} \times \sqrt{15} = 3\sqrt{5}$ وإستنتج تأطيراً للعدد $\sqrt{5}$

14) علماً أن $-2 \leq a + 1 \leq -1$ أطر :

$5a - 2$ و $-a + \sqrt{2}$ و a^2 و $\frac{1}{a+1}$

15) x و y عددين حقيقين موجبين حيث :

$1 \leq \frac{x-2}{3} \leq \frac{1}{3}$ و $1 \leq (2y - 1)^2 - 3 \leq 6$

بين أن $3 \leq x \leq 5$ و $\frac{3}{2} \leq y \leq 2$

16) عددان حقيقيان موجبان ، بين أن : $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

حل سلسلة 4 للترتيب والعمليات

1) إذا علمت أن $x < -2$
قارن بين 13 و $-5x+3$

لدينا $x < -2$

$5 \times x < 5 \times (-2)$

$5x < -10$

$-5x > 10$

$-5x + 3 > 10 + 3$

$-5x + 3 > 13$

2) a و b عددان حقيقيان
بين أن $a^2 + b^2 \geq 2ab$

لنبين أن $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

لدينا $a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2$

$= (a-b)^2$

بما أن $(a-b)^2 \geq 0$

إذن $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

وبالتالي $a^2 + b^2 \geq 2ab$

3) بين أن $a^2 - 12a \geq -36$
بحيث a عدد حقيقي

لنبين أن $a^2 - 12a + 36 \geq 0$

$a^2 - 12a + 36 = a^2 - 2 \times a \times 6 + 6^2$

$= (a-6)^2$

بما أن $(a-6)^2 \geq 0$

إذن $a^2 - 12a + 36 \geq 0$

وبالتالي $a^2 - 12a \geq 36$

4) a و b عددان حقيقيان بحيث $a = b - 3$
قارن a و b

لدينا $a = b - 3$

$a - b = -3$

بما أن $-3 < 0$ إذن $a - b < 0$

وبالتالي $a < b$

5) x و y عددان حقيقيان بحيث $x - 1 = y - 1$
قارن x و y

لدينا $x - 1 = y - 1$

$x - y = -1 + 1$

$x - y = 0$

وبالتالي $x = y$

6) a و b عددان حقيقيان موجبان قطعاً.
بين أن : $\frac{a^2+b^2}{2ab} \geq 1$

لنبين أن $\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1 \geq 0$

لدينا $\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1 = \frac{a^2+b^2-2ab}{2ab}$

$= \frac{a^2-2ab+b^2}{2ab} = \frac{(a-b)^2}{2ab}$

بما أن $(a-b)^2 \geq 0$

و $a > 0$ و $b > 0$ إذن $2ab > 0$

وبالتالي $\frac{(a-b)^2}{2ab} \geq 0$

7) x عدد حقيقي موجب قطعاً.
بين أن : $x + \frac{1}{x} \geq 2$

لنبين أن $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$

$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2+1-2x}{x}$

$= \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$

بما أن $x > 0$ و $(x-1)^2 \geq 0$

إذن $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

إذن $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$

وبالتالي $x + \frac{1}{x} \geq 2$

8) x عدد حقيقي بحيث $x \leq 5$.
بين أن : $\frac{1-x}{4} \geq -1$

لدينا $x \leq 5$ إذن $-x \geq -5$

$1 - x \geq 1 - 5$

$1 - x \geq -4$

$\frac{1-x}{4} \geq \frac{-4}{4}$

$\frac{1-x}{4} \geq -1$

9) a عدد حقيقي بحيث $a \geq -2$.

بين أن : $\frac{-3a+4}{5} \leq 2$

$$a \geq -2$$
$$3a \geq -6$$
$$-3a \leq 6$$
$$-3a + 4 \leq 10$$
$$\frac{-3a+4}{5} \leq \frac{10}{5}$$
$$\frac{-3a+4}{5} \leq 2$$

10) x عدد حقيقي .

بين أن : $(x+5)^2 \geq 20x$

لدينا لنبين أن $(x+5)^2 - 20x \geq 0$

$$(x+5)^2 - 20x = x^2 + 10x + 5^2 - 20x$$
$$= x^2 + 10x + 25 - 20x$$
$$= x^2 - 10x + 25$$
$$= (x-5)^2$$

بما أن $(x-5)^2 \geq 0$

إذن $(x+5)^2 - 20x \geq 0$

وبالتالي $(x+5)^2 \geq 20x$

11) علماً أن $1 \leq \sqrt{3} \leq 2$ أطر $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$

$$1 \leq \sqrt{3} \leq 2$$
$$2 \leq 2\sqrt{3} \leq 4$$
$$7 + 2 \leq 7 + 2\sqrt{3} \leq 7 + 4$$
$$9 \leq 7 + 2\sqrt{3} \leq 11$$
$$\sqrt{9} \leq \sqrt{7+2\sqrt{3}} \leq \sqrt{11}$$
$$3 \leq \sqrt{7+2\sqrt{3}} \leq \sqrt{11}$$

12) علماً أن $-5 \leq 2a - 3 \leq 1$ أطر a

لدينا $-5 \leq 2a - 3 \leq 1$

$$-5 + 3 \leq 2a - 3 + 3 \leq 1 + 3$$
$$-2 \leq 2a \leq 4$$
$$\frac{-2}{2} \leq \frac{2a}{2} \leq \frac{4}{2}$$
$$-1 \leq a \leq 2$$

13) أ- قارن العددين : $\sqrt{3} + \sqrt{15}$ و $2\sqrt{15}$

أ – لدينا $\sqrt{3} \leq \sqrt{15}$

$$\sqrt{3} + \sqrt{15} \leq \sqrt{15} + \sqrt{15}$$

وبالتالي $\sqrt{3} + \sqrt{15} \leq 2\sqrt{15}$

ب - علماً أن : $1 < \sqrt{3} < 2$ و $3 < \sqrt{15} < 4$

أطر $\sqrt{3} + \sqrt{15}$ و $\sqrt{3} - \sqrt{15}$

ب – نأطر $\sqrt{3} + \sqrt{15}$

لدينا $1 \leq \sqrt{3} \leq 2$

$$3 \leq \sqrt{15} \leq 4$$
$$1 + 3 \leq \sqrt{3} + \sqrt{15} \leq 2 + 4$$
$$4 \leq \sqrt{3} + \sqrt{15} \leq 6$$

نأطر $\sqrt{3} - \sqrt{15}$

لدينا $1 \leq \sqrt{3} \leq 2$

و $-4 \leq \sqrt{15} \leq -3$

$$3 \leq -\sqrt{15} \leq 4$$
$$1 - 4 \leq \sqrt{3} - \sqrt{15} \leq 2 - 3$$

إذن $-3 \leq \sqrt{3} - \sqrt{15} \leq -1$

ج- بين أن $\sqrt{3} \times \sqrt{15} = 3\sqrt{5}$

وإستنتج تأطيراً للعدد $\sqrt{5}$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{15} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$$
$$= \sqrt{3}^2 \times \sqrt{5}$$
$$= 3\sqrt{5}$$

لدينا $1 \leq \sqrt{3} \leq 2$

$$3 \leq \sqrt{15} \leq 4$$
$$1 \times 3 \leq \sqrt{3} \times \sqrt{15} \leq 2 \times 4$$
$$3 \leq 3\sqrt{5} \leq 8$$
$$\frac{3}{3} \leq \frac{3\sqrt{5}}{3} \leq \frac{8}{3}$$
$$1 \leq \sqrt{5} \leq \frac{8}{3}$$

14) علماً أن $-2 \leq a + 1 \leq -1$

أطر : $5a - 2$ و $-a + \sqrt{2}$ و a^2 و $\frac{1}{a+1}$

لدينا $-2 \leq a + 1 \leq -1$

$$-2 - 1 \leq a + 1 - 1 \leq -1 - 1$$

$$-3 \le a \le -2$$

✓ نأطر : $5a-2$

$$-3 \le a \le -2$$
$$-15 \le 5a \le -10$$
$$-15-2 \le 5a-2 \le -10-2$$
$$-17 \le 5a-2 \le -12$$

✓ نأطر : $-a+\sqrt{2}$

$$-3 \le a \le -2$$
$$2 \le -a \le 3$$
$$2+\sqrt{2} \le -a+\sqrt{2} \le 3+\sqrt{2}$$

✓ نأطر : a^2

$$-3 \le a \le -2$$
$$2 \le -a \le 3$$
$$2^2 \le a^2 \le 3^2$$
$$4 \le a^2 \le 9$$

✓ نأطر : $\frac{1}{a+1}$

$$-3 \le a \le -2$$
$$-3+1 \le a+1 \le -2+1$$
$$-2 \le a+1 \le -1$$
$$\frac{1}{-1} \le \frac{1}{a+1} \le \frac{1}{-2}$$
$$-1 \le \frac{1}{a+1} \le -\frac{1}{2}$$

15) x و y عددين حقيقين موجبين حيث :

$1 \le (2y-1)^2-3 \le 6$ و $\frac{1}{3} \le \frac{x-2}{3} \le 1$

بين أن $3 \le x \le 5$ و $\frac{3}{2} \le y \le 2$

لدينا $\frac{1}{3} \le \frac{x-2}{3} \le 1$

$$3 \times \frac{1}{3} \le 3 \times \frac{x-2}{3} \le 3 \times 1$$
$$1 \le x-2 \le 3$$
$$1+2 \le x-2+2 \le 3+2$$

وبالتالي $3 \le x \le 5$

لدينا $1 \le (2y-1)^2-3 \le 6$

$$1+3 \le (2y-1)^2-3+3 \le 6+3$$
$$4 \le (2y-1)^2 \le 9$$
$$\sqrt{4} \le \sqrt{(2y-1)^2} \le \sqrt{9}$$
$$2 \le 2y-1 \le 3$$
$$2+1 \le 2y-1+1 \le 3+1$$
$$3 \le 2y \le 4$$
$$\frac{3}{2} \le \frac{2y}{2} \le \frac{4}{2}$$

إذن $\frac{3}{2} \le y \le 2$

16) عددان حقيقيان موجبان ،

بين أن : $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$

لنبين أن $\sqrt{xy}-\frac{x+y}{2} \ge 0$

$$\sqrt{xy}-\frac{x+y}{2} = \frac{2\sqrt{xy}-(x+y)}{2}$$
$$= \frac{2\sqrt{xy}-x-y}{2} = \frac{-(2\sqrt{xy}-x+y)}{-2}$$
$$= \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{-2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{-2}$$

بما أن $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \ge 0$ و $-2<0$

إذن $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{-2} \le 0$

يعني $\sqrt{xy}-\frac{x+y}{2} \le 0$

وبالتالي $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$