المثلثات : المتقايسة - المتشابهة

تمرين 1

$ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$ ($AB < CD$) و قطراه يتقاطعان في I

① بين أن ADC يقايس BDC

② بين أن ADB يقايس ACB

③ استنتج أن ADI يقايس BIC

تمرين 2

ABC مثلث متساوي الأضلاع.

لتكن : A' مماثلة A بالنسبة لـ B ، B' مماثلة B بالنسبة لـ C ، C' مماثلة C بالنسبة لـ A

① بين أن المثلثات $BB'A'$ و $CC'B'$ و $AA'C'$ متقايسة

② استنتج طبيعة المثلث $A'B'C'$

تمرين 3

$ABCD$ متوازي أضلاع . I و J هما على التوالي المسقطان العموديان لـ B و D على (AC).

① بين أن ABI يقايس DJC

② استنتج أن DJI يقايس BJI

③ استنتج طبيعة الرباعي $DIBJ$.

تمرين 4

$ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$ ($AB < CD$) و قطراه يتقاطعان في I

◈ بين أن AIB و CID متشابهان

تمرين 5

$ABCD$ رباعي محدب محاط بدائرة (C) و قطراه يتقاطعان في I

◈ بين أن AIB و CID متشابهان

◈ استنتج أن : $IA \times IC = IB \times ID$

تمرين 6

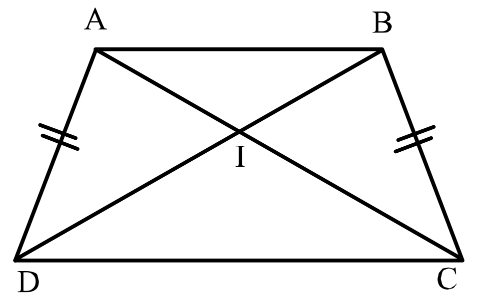
ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

◈ بين أن ABH و ABC متشابهان ثم استنتج أن : $AB^2 = BH \times BC$

◈ بين أن ABH و ACH متشابهان ثم استنتج أن : $AH^2 = BH \times CH$

المثلثات المتقايسة و المتشابهة -حلول

تمرين 1   انتبه ←   تعليق ←



① لنبين أن ADC يقايس BDC

لدينا $[DC]$ ضلع مشترك للمثلثين ADC و BDC (1)

و بما أن $ABCD$ متساوي الساقين فإن : $BC = AD$ (2)

و أيضا : $B\hat{C}D = A\hat{D}C$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : ADC يقايس BDC

② لنبين أن ADB يقايس ACB

لدينا $[AB]$ ضلع مشترك للمثلثين ADB و ACB (4)

و بما أن $ABCD$ متساوي الساقين فإن : $BC = AD$ (5)

و أيضا : $A\hat{B}C = B\hat{A}D$ (6)

من (4) و (5) و (6) نستنتج أن : ADC يقايس BDC

③ لنبين أن ADI يقايس BIC

لدينا حسب السؤال ① ADC يقايس BDC، إذن : $C\hat{A}D = D\hat{B}C$ أي : $I\hat{A}D = I\hat{B}C$ (7)

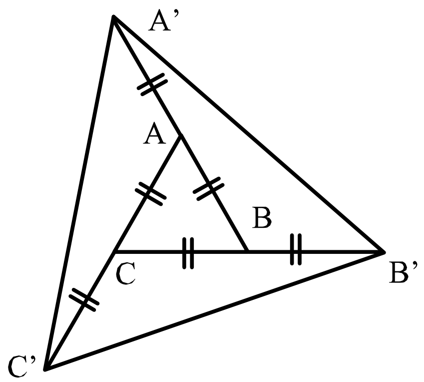
لدينا حسب السؤال ② ADB يقايس ACB، إذن : $A\hat{D}B = A\hat{C}B$ أي : $A\hat{D}I = I\hat{C}B$ (8)

و لدينا : $BC = AD$ (9)

من (7) و (5) و (6) نستنتج أن : ADC يقايس BDC

← ترقيم المتساويات ليس ضروريا، لكنه يمثل و سيلة مفيدة للاشارة إلى حالة التقايس المستعملة في البرهان.
لاحظ أنه بعد البرهان أن مثلثان متقايسان يصبح بوسعنا توظيف زواياهما المتقايسة في الاجابة عن سؤال آخر.

تمرين 2   انتبه ←   تعليق ←



① لنبين أن المثلثات $BB'A'$ و $CC'B'$ و $AA'C'$ متقايسة

لدينا A منتصف $[A'B]$ و B منتصف $[B'C]$ و C منتصف $[C'A]$

و بما أن : $AB = BC = AC$

فإن : $AA' = BB' = CC'$ (1) و $AC' = BA' = CB'$ (2)

و بما أن قياسات زوايا المثلث المتساوي الأضلاع تساوي $60°$ فإن :

$A'\hat{A}C = A'\hat{B}B' = B'\hat{C}C' = 180° - 60° = 120°$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $BB'A'$ و $CC'B'$ و $AA'C'$ متقايسة.

② لنحدد طبيعة المثلث $A'B'C'$

لدينا المثلثات $BB'A'$ و $CC'B'$ و $AA'C'$ متقايسة إذن :

$A'B' = B'C' = C'A'$ و هذا يعني أن $A'B'C'$ مثلث متساوي الأضلاع.

← يمكن البرهان على تقايس أكثر من مثلثين في نفس الوقت.
في هذا التمرين برهنا على تقايس الزوايا بحساب قياسها عكس التمرين السابق.

تمرين 3 انتبه ← تعليق ←

① لنبين أن ABI يقايس DJC

لدينا $ABCD$ مستطيل إذن (AB) و (DC) متوازيان و (AC) قاطع لهما،

إذن الزاويتان $B\hat{A}C$ و $A\hat{C}D$ متبادلتان داخليا إذن :

$B\hat{A}C = A\hat{C}D$ (1)

و بما أن المثلثان ABI و DJC قائما الزاوية ، فإن :

$A\hat{B}I = 90° - B\hat{A}C$ و $C\hat{D}J = 90° - A\hat{C}D$

إذن : $A\hat{B}I = C\hat{D}J$ (2)

و بما أن : $AB = CD$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : ABI يقايس DJC

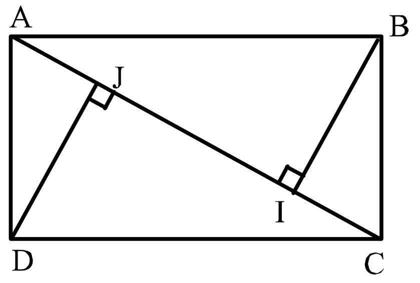
② لنبين DJI يقايس BJI

لدينا: $D\hat{J}I = B\hat{I}A = 90°$ (4)

و لدينا : $[IJ]$ ضلع مشترك (5)

و حسب السؤال السابق ABI يقايس DJC منه : $DJ = IB$ (6)

من (4) و (5) و (6) نستنتج أن : DJI يقايس BJI



③ لنحدد طبيعة الرباعي $DIBJ$.

لدينا $DJ = IB$

و لدينا DJI يقايس BJI

إذن : $DI = BJ$

نستنتج أن : $DIBJ$ متوازي أضلاع.

← في السؤال الأول لم نستعمل تقايس الزاويتين القائمتين $A\hat{I}B$ و $D\hat{J}C$ و ذلك لأن خاصية التقايس تستوجب تقايس زاويتين و الضلع المحادي لهما ، لكن الضلع المحادي لـ $A\hat{I}B$ و $B\hat{A}C$ هو AI و الضلع المحادي لـ $D\hat{J}C$ و $A\hat{C}D$ هو JC و يتعذر علينا من معطيات التمرين البرهان أن : $AI = JC$ ، لذلك اضطررنا للبرهان أن $A\hat{B}I = C\hat{D}J$ لأن الضلع المحادي لـ $B\hat{A}C$ و $A\hat{B}I$ هو AB ، و يمكننا البرهان بسهولة على تقايس $[AB]$ و $[DC]$

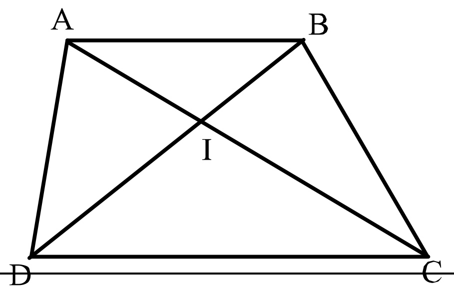
تمرين 4 انتبه ← تعليق ←

① لنبين أن AIB و CID متشابهان

لدينا $A\hat{I}B$ و $D\hat{I}C$ زاويتان متقابلتان بالرأس ، إذن $A\hat{I}B = D\hat{I}C$

و لدينا $(AB)//(DC)$ و (DB) قاطع لهما ، إذن الزاويتان المتبادلتان داخليا $A\hat{B}I$ و $I\hat{D}C$ متقايستان.

بالتالي : AIB و CID متشابهان



← استعملنا الحالة الأولى للتشابه(تقايس زاويتين) و هي الأكثر استعمالا في التمارين.

تمرين 5 انتبه ← تعليق ←

① لنبين أن AIB و CID متشابهان

لدينا $I\hat{A}B$ و $I\hat{D}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس BC

إذن : $I\hat{A}B = I\hat{D}C$ (1)

لدينا $A\hat{B}I$ و $I\hat{C}D$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AD

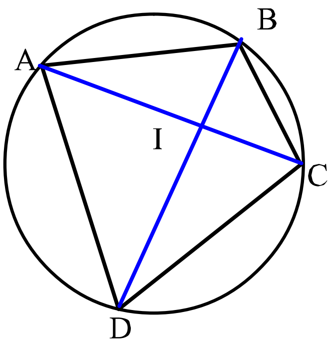
إذن : $A\hat{B}I = I\hat{C}D$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن AIB و CID متشابهان

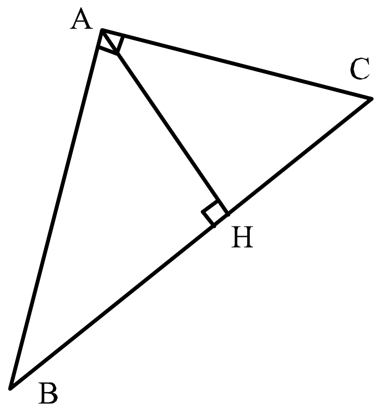
② لنبين أن $IA \times IC = IB \times ID$

لدينا AIB و CID متشابهان ، إذن : $\frac{AB}{DC} = \frac{AI}{DI} = \frac{BI}{CI}$ منه : $\frac{AI}{DI} = \frac{BI}{CI}$

بالتالي : $\underline{IA \times IC = IB \times ID}$



تمرين 6 | انتبه ← | تعليق ←



① لنبين أن ABH و ABC متشابهان و أن : $AB^2 = BH \times BC$

لدينا : $A\hat{B}H$ زاوية مشتركة

و لدينا : $A\hat{H}B = 90°$ و $B\hat{A}C = 90°$ منه : $B\hat{A}C = A\hat{H}B$

نستنتج إذن أن المثلثين ABH و ABC متشابهان

منه : $\frac{BC}{BA} = \frac{AC}{HA} = \frac{AB}{HB}$ منه : $\frac{BC}{BA} = \frac{AB}{HB}$ ، بالتالي : $AB^2 = BH \times BC$

② لنبين أن ABH و ACH متشابهان و أن : $AH^2 = BH \times CH$

و لدينا : $A\hat{H}B = 90°$ و $A\hat{H}C = 90°$ منه : $B\hat{A}C = A\hat{H}B$ (1)

و لدينا : $A\hat{C}H + H\hat{A}C = 180 - 90 = 90°$

و $B\hat{A}H + H\hat{A}C = B\hat{A}C = 90°$

إذن : $A\hat{C}H + H\hat{A}C = B\hat{A}H + H\hat{A}C$ إذن : $A\hat{C}H = B\hat{A}H$ (2)

من (1) و (2) نستنتج إذن أن المثلثين ABH و ACH متشابهان

منه : $\frac{CH}{AH} = \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{BA}$ منه : $\frac{CH}{AH} = \frac{AH}{BH}$ ، بالتالي : $AH^2 = BH \times CH$

← لاحظ أهمية الزوايا المتناظرة في استنتاج التناسب.