الدرس ⑥ : المتجهات والإزاحة

I - المتجهة :

1) عناصر متجهة غير منعدمة :

أ - تعريف :

A و B نقطتان مختلفتان من المستوى
الزوج (A,B) يحدد متجهة يرمز لها بالرمز $\overrightarrow{AB}$
عناصرها هي :
* الإتجاه : هو المستقيم (AB)
* المنحى : هو منحى نصف المستقيم $[AB)$ أي من A نحو B
* المنظم (أو المعيار) : هو المسافة (الطول) AB
- النقطة A تسمى أصل المتجهة $\overrightarrow{AB}$
- النقطة B تسمى طرف المتجهة $\overrightarrow{AB}$

ب - الشكل الهندسي :

نسمي الشكل جانبه متجهة ويرمز لها بـ $\overrightarrow{AB}$

2) المتجهة المنعدمة :

*** تعريف :**

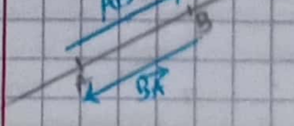
- المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها إتجاه ولا منحى ومنظمها يساوي 0 وتسمى المتجهة المنعدمة ونكتب $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
- إذا كان $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ فإن $A = B$
(أي أن النقطتان A و B منطبقتان)

3) مقابل متجهة :

أ - تعريف :

A و B نقطتان لدينا : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
المتجهة $\overrightarrow{BA}$ تسمى مقابل المتجهة $\overrightarrow{AB}$
ونكتب : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

ب - الشكل الهندسي :



لدينا : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

II - تساوي متجهتين :

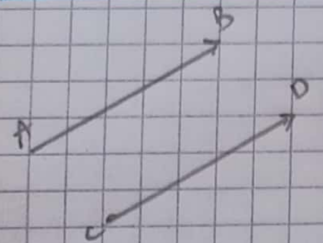
1) تعريف :

تكون متجهتان متساويتين إذا كان لهما :
- نفس الإتجاه
- نفس المنحى
- نفس المعيار (المنظم).

بتعبير آخر : تكون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا كان :
- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس الإتجاه أي أن : $(AB) // (CD)$
- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنحى
- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنظم (الطول) أي $AB = CD$

*** الشكل الهندسي :**

لدينا : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

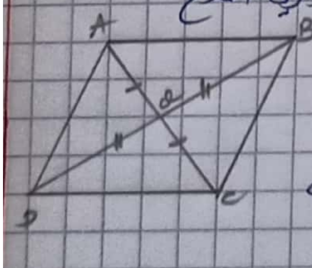


2) خاصيات مهمة :

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ يعني أن $ABCD$ متوازي أضلاع
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ يعني أن للقطعتين $[AC]$ و $[BD]$ نفس المنتصف

*** الشكل الهندسي :**

نعتبر الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع



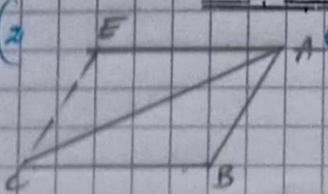
إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$
والقطعتان $[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف O

3) تطبيق :

ليكن مثلث ABC
1) أنشئ النقطة E بحيث : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$
2) حدد طبيعة الرباعي $ABCE$

*** جواب :**

1)



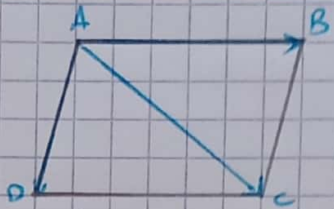
2) لدينا : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$
إذن $ABCE$ متوازي أضلاع

III - مجموع متجهتين:

1) تعريف:

نقول أن المتجهة $\overrightarrow{AC}$ هو مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ إذا كان الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
ونكتب: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

* **الشكل الهندسي:**



$ABCD$ متوازي أضلاع

إذن: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

ولدينا كذلك:

$$\begin{cases}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}\\ \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}\end{cases}$$

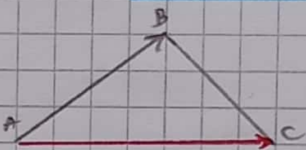
2) علاقة شال:

أ- خاصية:

A و B و C نقط من المستوى
لدينا: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
هذه المتساوية تسمى علاقة شال.

ب- الشكل:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



ج- أمثلة:

لنبسط ما يلي:

* $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GE}$
$=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GE}$
$=\overrightarrow{EE}=\vec{0}$

* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BD}$
$=\vec{0}+\overrightarrow{DB}$
$=\overrightarrow{DB}$

3) تمرين تطبيقي:

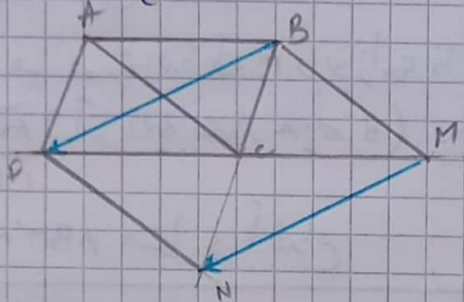
$ABCD$ متوازي أضلاع

1) أنشئ النقطتين M و N بحيث: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

2) بين أن: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BD}$

* **الحل:**

1) لدينا: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
إذن: $ABMC$ متوازي أضلاع
و $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
إذن $ACND$ متوازي أضلاع



2) لدينا: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$
$=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$
$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$
$=\overrightarrow{BD}$

وبالتالي فإن: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BD}$

4) مجموع عدة متجهات:

أ- قاعدة:

$\overrightarrow{AB}$ متجهة و a عدد صحيح طبيعي
لدينا:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$
$\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\dots+\overrightarrow{AB}}_{a \text{ مرة}}=a\overrightarrow{AB}$

ب- ملاحظة:

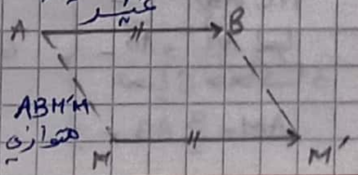
لجمع ثلاث متجهات (أو أكثر) نجمع متجهتين منهما، ونطبق على مجموعهما المتجهة الثالثة، وذلك باستعمال الإزاحة حتى نطبق علاقة شال.

IV - الإزاحة:

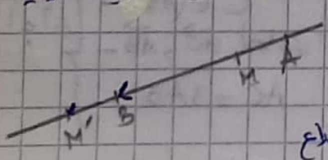
1) نشاط:

A و B و M ثلاث نقط من المستوى
أنشئ في كل حالة النقطة M' بحيث: $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$

حالة ①: النقط غير مستقيمية



حالة ②: مستقيمية



في كلتا الحالتين، نقول أن M' هي صورة M
بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{AB}$ (التي تحول A إلى B)

2) تعريف:

$\vec{AB}$ متجهة غير منعدمة
النقطة M' هي صورة النقطة M بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{AB}$ (أو التي تحول A إلى B) يعني أن
$\vec{MM'} = \vec{AB}$
يعني أن $ABM'M$ متوازي أضلاع

3) طريقة الإنشاء:

A و B نقطتان من المستوى. M نقطة من المستوى
M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{AB}$

1) إذا كانت $M \in (AB)$
فإن: $M' \in [AB)$ بحيث: $AB = MM'$

2) إذا كانت $M \notin (AB)$
فإن M' هي الرأس الرابع لمتوازي أضلاع $ABM'M$ بالبركار.

* فقرة إضافية: ضرب متجهة في عدد جذري

1) تعريف:

$\vec{AB}$ متجهة غير منعدمة و k عدد جذري
نسمي المتجهة $\vec{AM}$ ضرب المتجهة $\vec{AB}$ في العدد الجذري k ونكتب $\vec{AM} = k\vec{AB}$ إذا كانت M نقطة من المستقيم (AB) بحيث:

* إذا كان $k>0$ فإن $AM = kAB$ و $\vec{AM}$ و $\vec{AB}$ لهما نفس المنحى
* إذا كان $k<0$ فإن $AM = -kAB$ و $\vec{AM}$ و $\vec{AB}$ لهما منحيان متعاكسان

2) مثال:

$\vec{AC} = 3\vec{AB}$ و $\vec{BC} = -2\vec{BA}$ و $\vec{AM} = -\frac{3}{2}\vec{AB}$

$\vec{AC} = 3\vec{AB}$ أي أن:
- $C \in (AB)$
- $\vec{AC}$ و $\vec{AB}$ لهما نفس المنحى
- $AC = 3AB$

$\vec{AM} = -\frac{3}{2}\vec{AB}$
- $M \in (AB)$
- $\vec{AM}$ و $\vec{AB}$ لهما منحيان متعاكسان
- $AM = \frac{3}{2}AB$