الدرس ④ : مبرهنة فيتاغورس وجيب تمام زاوية حادة

I - مبرهنة فيتاغورس :

1) الخاصية المباشرة :

أ - خاصية :

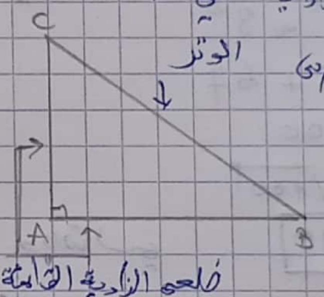
إذا كان مثلث قائم الزاوية، فإن مربع وتره يساوي مجموع مربعي ضلعي الزاوية القائمة

بتعبير آخر: إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في A فإن:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

ب - الشكل الهندسي:

ABC مثلث قائم الزاوية في A



إذن حسب خاصية فيتاغورس المباشرة فإن:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

*** ملاحظة هامة:**

في مثلث قائم الزاوية، طول الوتر دائما أكبر من طولي ضلعي الزاوية القائمة

ABC مثلث قائم الزاوية في A إذن:

$$\boxed{AB < BC \text{ و } AC < BC}$$

ج - مثال:

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث $AB = 3cm$ و $AC = 4cm$ لنحسب BC

لدينا المثلث ABC قائم الزاوية في A

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 3^2 + 4^2$$
$$= 9 + 16$$
$$= 25$$

إذن: $BC = \sqrt{25}$

وبالتالي فإن: $BC = 5cm$

د - ملاحظات:

* تمكننا مبرهنة فيتاغورس من حساب ضلع لمثلث قائم الزاوية بمعرفة الضلعين الآخرين.

* في المرحلة الأخيرة من الحساب نحتاج للجذر المربع لإزالة المربع، هذا الجذر يحذف إذا كان العدد مربعا كاملا ويبقى إذا لم يكن كذلك.

2) تمرين تطبيقي:

EFG قائم الزاوية في E بحيث: $EF = 8$ و $FG = 10$

أحسب EG

الحل: لدينا المثلث EFG قائم الزاوية في E

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن:

$$FG^2 = EF^2 + EG^2$$
$$10^2 = 8^2 + EG^2$$
$$EG^2 = 10^2 - 8^2$$
$$EG^2 = 100 - 64$$
$$EG^2 = 36$$
$$EG = \sqrt{36}$$

وبالتالي فإن: $\boxed{EG = 6}$

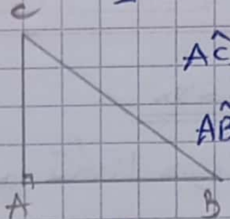
II - جيب تمام زاوية حادة

1) تعريف:

جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية يساوي خارج طول الضلع المحاذي للزاوية الحادة على طول الوتر

* اصطلاحات :

ABC مثلث قائم الزاوية في A



- الزاويتان الحادتان هما $A\hat{B}C$ و $A\hat{C}B$
- [AB] هو الضلع المحاذي للزاوية $A\hat{B}C$ والمقابل للزاوية $A\hat{C}B$
- [AC] هو الضلع المحاذي للزاوية $A\hat{C}B$ والمقابل للزاوية $A\hat{B}C$
- [BC] هو الوتر

$$\cos A\hat{B}C = \frac{\text{طول الضلع المحاذي للزاوية } A\hat{B}C}{\text{طول الوتر}} = \frac{AB}{BC}$$

يرمز لجيب تمام زاوية حادة x بالرمز $\cos x$ ويقرأ " Cosinus " وهي النسبة المثلثية الأولى

* تعبير آخر :

ABC مثلث قائم الزاوية في A

$\cos A\hat{C}B = \frac{AC}{BC}$ و $\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$

2) ملاحظات هامة :

1) x تمثل زاوية حادة إذن : $\boxed{0<\cos x<1}$

* جميع قيم $\cos x$ محصورة بين 0 و 1

2) النسبة المثلثية $\cos x$ ليست لها وحدة

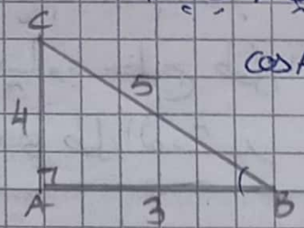
3) لحساب $\cos 37°$ مثلا ، نستعمل الزر cos في الآلة الحاسبة

اختصارا $\cos A\hat{B}C = \cos\hat{B}$

3) مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :

احسب $\cos A\hat{B}C$ و $\cos A\hat{C}B$



$$\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6 < 1$$

$$\cos A\hat{C}B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8 < 1$$

4) تمرين تطبيقي :

EFG مثلث قائم الزاوية في E بحيث EF=6cm و EG=8cm احسب $\cos E\hat{F}G$

* ملاحظة : لحساب $\cos E\hat{F}G$ نحتاج للوتر [FG] وهو طول ناقص في هذا التمرين، إذن في هذه الحالة نستعمل مبرهنة فيثاغورس لحساب EG ثم نطبق تعريف cos

الحل : لنحسب أولا FG

المثلث EFG قائم الزاوية في E

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن :

$$FG^2 = EF^2 + EG^2$$
$$FG^2 = 6^2 + 8^2$$
$$FG^2 = 36 + 64$$
$$FG^2 = 100$$
$$FG = \sqrt{100}$$
$$\boxed{FG = 10}$$

وبالتالي لدينا إذن :

$$\cos E\hat{F}G = \frac{EF}{FG} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos E\hat{G}F = \frac{EG}{FG} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0,8$$