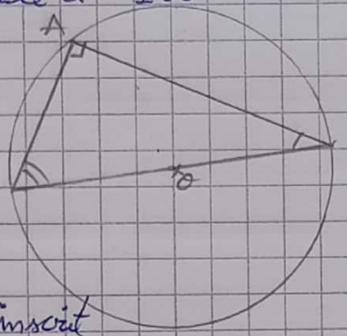
Chapitre ⑧ : Angles inscrits et angles au centre

I – Rappel de propriétés importante :

*** Propo ① :**

* La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°

$\hat{ABC} + \hat{ACB} + \hat{BAC} = 180°$



* L'angle $\hat{BOC}$ est plat

càd $\hat{BOC} = 180°$

* Si le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [BC], alors le triangle ABC est rectangle en A ⇒ $\hat{BAC} = 90°$

* Si l'un des côtés d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé à ce côté.

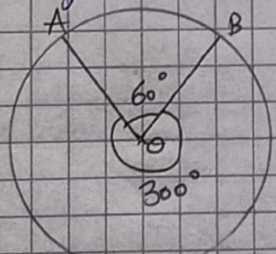
*** Propo ② :**

une angle complète est égale à 360°

On a $\check{AOB} + \hat{AOB} = 360°$

$\check{AOB} = 360° - \hat{AOB}$

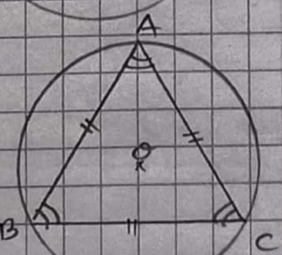
$\check{AOB} = 300°$



*** Propo ③ :**

Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux à 60°

$\hat{ABC} = \hat{ACB} = \hat{BAC} = 60°$

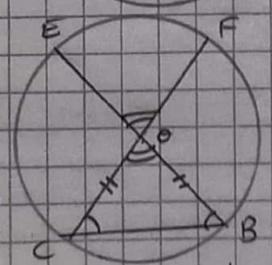


*** Propo ④ :**

* Dans le triangle isocèle OBC

On a : * OB = OC car sont deux rayons

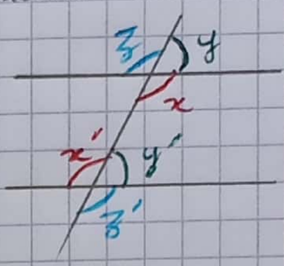
* $\hat{OBC} = \hat{OCB}$ car sont les angles de la base



* Les angles opposés par le sommet sont égaux $\hat{BOC} = \hat{EOF}$

*** Propo ⑤ :** deux droites parallèles et une sécante.

(D) // (D') et (Δ) sécante



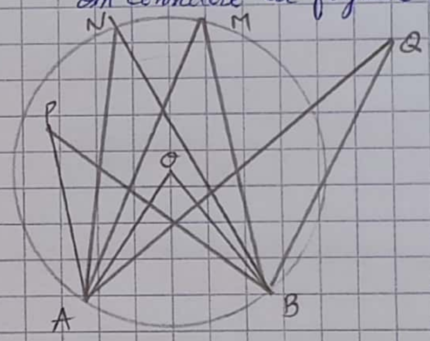
$x = x'$ car sont deux angles alternes-internes

$z = z'$ car sont deux angles alternes-externes

$y = y'$ car sont deux angles correspondantes.

⇒ Activité globale :

On considère la figure suivante.



1) Déterminer les angles dont le sommet est sur le cercle et ces deux côtés coupent le cercle en deux points (cet angle s'appelle inscrit)

2) Déterminer les angles dont le sommet est le centre du cercle (cet angle s'appelle angle au centre)

3) Déterminer les angles qui ne sont ni inscrit, ni au centre.

4) Déterminer un angle inscrit et angle au centre associé (càd interceptent le même arc), Que remarquez-vous ?

5) Déterminer deux angles inscrit qui interceptent le même arc. Que remarquez-vous ?

Solution

1°) Les angles inscrits sont : $A\hat{N}B$, $A\hat{M}B$, $M\hat{A}B$, $M\hat{N}B$, $N\hat{B}M$ et $N\hat{A}M$ ....

2°) Les angles au centre sont $A\hat{O}B$, $B\hat{O}M$, $M\hat{O}N$, $N\hat{O}A$, $M\hat{O}A$ et $N\hat{O}B$.

3°) les angles $A\hat{P}B$ et $A\hat{Q}B$ ne sont ni inscrit, ni au centre.

4°) L'angle $A\hat{M}B$ est inscrit et $A\hat{O}B$ est au centre associé car ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$

On remarque : $A\hat{O}B = 2A\hat{M}B$

5°) Les deux angles $N\hat{B}M$ et $N\hat{A}M$ sont inscrits interceptent le même arc $\overset{\frown}{MN}$

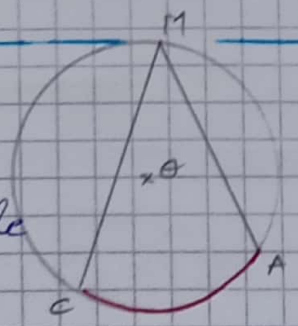
On remarque que : $N\hat{A}M = N\hat{B}M$

II - Angle inscrit :

1°) Définition :

Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle en deux points.

*** figure géométrique :**



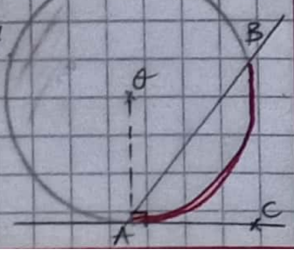
(C) cercle de centre O

A, M et C trois points du cercle

L'angle $A\hat{M}C$ est inscrit intercepte l'arc $\overset{\frown}{AC}$

2) Cas particulier :

On considère la figure suivante telque (AC) est une tangente au cercle (C) au point A.



L'angle $B\hat{A}C$ est angle inscrit

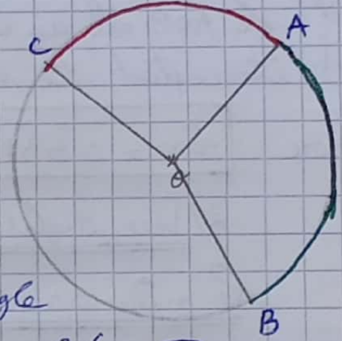
Il intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$

III - Angle au centre :

1°) Définition :

Un angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle et intercepte un arc dans le cercle.

2) Exemple :



→ L'angle $A\hat{O}B$ est angle au centre intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$

→ L'angle $A\hat{O}C$ est un angle au centre intercepte l'arc $\overset{\frown}{AC}$

IV - Propriétés :

1) Angle inscrit et angle au centre associé

a - Définition :

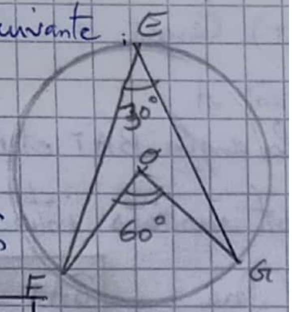
Un angle au centre est associé à un angle inscrit s'ils interceptent le même arc

b - propo ① :

La mesure de l'angle au centre est égale au double de celle de l'angle inscrit qui intercepte le même arc.

*** Exemple :**

On considère la figure suivante

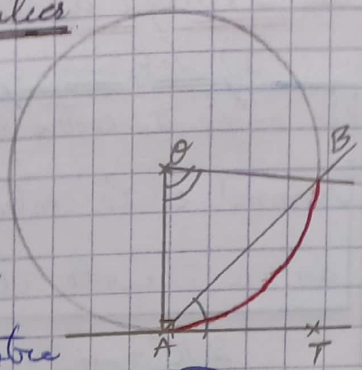


L'angle $F\hat{O}G$ est au centre et l'angle $F\hat{E}G$ est inscrit et interceptent le même arc $\overset{\frown}{FG}$

Donc $\boxed{F\hat{O}G = 2F\hat{E}G}$

et $\boxed{F\hat{E}G = \frac{1}{2} F\hat{O}G}$

c - Cas particulier



(C) cercle de centre O

(AT) est tangente du cercle au point A

* L'angle $\widehat{BAT}$ est inscrit
* L'angle $\widehat{AOB}$ est au centre

et interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$

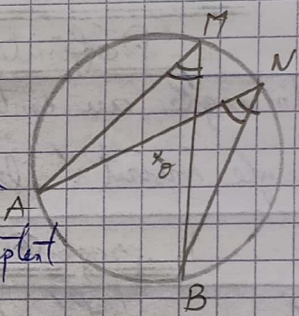
Donc $\boxed{\widehat{AOB} = 2\,\widehat{BAT}}$ et $\boxed{\widehat{BAT} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOB}}$

2) Deux angles inscrits interceptant le même arc :

a - propriété 2 :

Deux angles inscrits interceptent le même arc ont même mesure (isométriques)

* **Exemple 1**

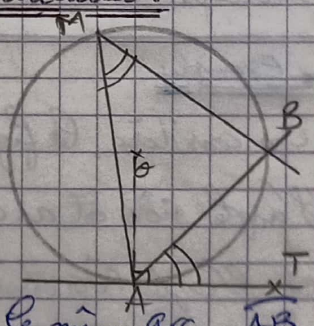


Dans la figure suivante :

On a $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$

Donc : $\boxed{\widehat{AMB} = \widehat{ANB}}$

b - Cas particulier :



(C) cercle de centre O

(AT) tangent du cercle au point A

les angles $\widehat{BAT}$ et $\widehat{BMA}$ sont inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{AB}$

Donc $\boxed{\widehat{BAT} = \widehat{BMA}}$

Remarque :

→ l'arc $\overset{\frown}{AB}$ qui ne contient pas le point M s'appelle la petite arc $\widehat{AOB} < 180°$

→ l'arc $\overset{\frown}{AB}$ qui contient le point M s'appelle la grande arc $\widehat{AOB} > 180°$