Chapitre ②: Développement et factorisation et identités remarquables

I - Rappel: vocabulaire:

1°/ Expression algébrique:

On appelle expression algébrique toute expression contenant à la fois des chiffres et des lettres.

* **Exemples:** $A = 2x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \sqrt{3}x + 1$

$B = (2x^2+3)(-4x-1)$

2°/ Expression numérique:

On appelle expression numérique toute expression ne contenant que des chiffres.

* **Exemples:** $C = 2\sqrt{7} + \frac{1}{2} - 11,5 + 17$

$D = \left(2\sqrt{3} - \frac{11}{3}\right)\left(11 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} + 1\right)$

3°/ Somme algébrique:

On appelle somme algébrique, toute expression algébrique ne contenant aucune parenthèse et écrite sous la forme d'une suite d'additions et de soustraction de nombres.

* **Exemples:** $E = 3x^2 + x\sqrt{3} - 11$

$F = \sqrt{2}x^5 - 4x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + \sqrt{7}$

4°/ Réduire (simplifier) une expression algébrique:

Réduire une expression algébrique, c'est la simplifier en regroupant les termes qui se ressemblent du plus petit au plus grand exposant.

* **Exemples:**

$G = 3x^2 - 2x + 4 - 5x^2 + 1 + 7x + x^3$

$= x^3 + 3x^2 - 5x^2 - 2x + 7x + 4 + 1$

$= x^3 - 3x^2 + 5x + 5$

$H = 3x - 2x^3 + 2x + x^3 - 11 - 5x + 7$

$= -2x^3 + x^3 + 3x + 2x - 5x - 11 + 7$

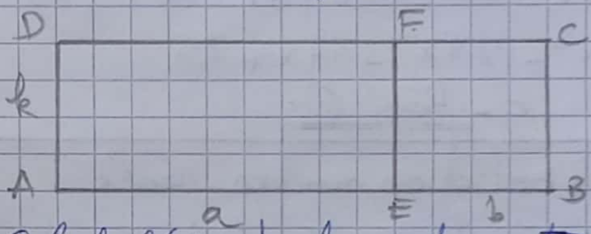
$= -x^3 - 4$

II - Développement et factorisation:

1°/ Activité:

ABCD et AEFD deux rectangles telque:

$AB = k$, $AE = a$, $BE = b$



1) Calculer l'air de chacun des rectangles ABCD et AEFD et EBCF

2) Déduire que: $k\times(a+b) = k\times a + k\times b$

Solution:

1) L'aire du rectangle AEFD est:

$S_1 = AE \times AD = k\times a$

L'aire du rectangle EBCF est:

$S_2 = EF \times EB = k\times b$

L'aire du triangle ABCD est:

$S = AD \times AB = k\times(a+b)$

2) L'aire du triangle ABCD est la somme des aires des triangles AEFD et EBCF

donc: $S = S_1 + S_2$

Alors: $k\times(a+b) = k\times a + k\times b$

2°/ Développement:

a- Définition:

Le développement est l'écriture d'un produit sous forme d'une somme ou différence

b- Règle ①:

k, a et b des nombres réels.

$k\times(a+b) = k\times a + k\times b$

$k\times(a-b) = k\times a - k\times b$

*** Exemples:**

$A = 2x(x+4)$
$= 2x \times x + 2x \times 4$
$= 2x^2 + 8x$

$B = (-3x-5) \times (-4x)$
$= -3x \times (-4x) - 5 \times (-4x)$
$= 12x^2 + 20x$

$C = 3x(2x^2 - x + 2) - 5(3x^2 + 4x - 5)$
$= 6x^3 - 3x^2 + 6x - 15x^2 - 20x + 25$
$= 6x^3 - 3x^2 - 15x^2 + 6x - 20x + 25$
$= 6x^3 - 18x^2 - 14x + 25$

c- Règle 2:

a, b, c et d des nombres réels

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

*** Exemples:**

$A = (3\sqrt{2} - 1)(2 + \sqrt{2})$
$= 3\sqrt{2} \times 2 + 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1 \times 2 - 1 \times \sqrt{2}$
$= 6\sqrt{2} + 3 \times 2 - 2 - \sqrt{2}$
$= 6\sqrt{2} - \sqrt{2} + 6 - 2$
$= 5\sqrt{2} + 4$

$B = (2-x)(3x+1)$
$= 2 \times 3x + 2 \times 1 - x \times 3x - x \times 1$
$= 6x + 2 - 3x^2 - x$
$= -3x^2 + 6x - x + 2$
$= -3x^2 + 5x + 2$

$C = 3x(2x+1) + (3x-2)(x+7)$
$= 6x^2 + 3x + 3x^2 + 21x - 2x - 14$
$= 6x^2 + 3x^2 + 3x + 21x - 2x - 14$
$= 9x^2 + 22x - 14$

3) Factorisation:

a- Définition:

La factorisation est l'écriture d'une somme ou différence sous forme d'un produit.

b- Règle:

k, a et b des nombres réels:

$$k \times a + k \times b = k \times (a+b)$$
$$k \times a - k \times b = k \times (a-b)$$

Remarque importante:

Pour factoriser une expression algébrique, on cherche un facteur commun, après on simplifie l'intérieur des parenthèses.

*** Exemples:**

→ Cas 1: facteurs commun sans parenthèses.

$A = 2\sqrt{3}x - \sqrt{6}x^2$
$= 2\sqrt{3}x - \sqrt{2} \times \sqrt{3}x^2$
$= \sqrt{3}x(2 - \sqrt{2}x)$

$B = 3x^2 - 9x = 3x \times x - 3x \times 3 = 3x(x-3)$

→ Cas 2: facteur commun avec parenthèse.

$C = (2x+1)(5-x) - (2x+1)(7x+3)$
$= (2x+1)[(5-x) - (7x+3)]$
$= (2x+1)(5 - x - 7x - 3)$
$= (2x+1)(2 - 8x)$

$D = (x+3)^2 + 2x(x+3) - (x+3)$
$= (x+3)(x+3) + 2x(x+3) - (x+3) \times 1$
$= (x+3)(x + 3 + 2x - 1)$
$= (x+3)(3x+2)$

→ Cas 3: factorisation double.

$E = 7(x-1) + 2x^2 - 2x$
$= 7(x-1) + 2x(x-1)$
$= (x-1)(7+2x)$

$F = -4x^2 + 2x + (-2x^3 + x^2)$
$= 2x(-2x+1) + x^2(-2x+1)$
$= (1-2x)(2x+x^2)$

III) Identités remarquables.

1) Propriétés:

a, b deux nombres réels

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Développement $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ factorisation

2) Exemples:

Identités remarquables et développement.

$A = (x+1)^2$
$= x^2 + 2\times x\times 1 + 1^2$
$= x^2 + 2x + 1$

$B = (2x+3)^2$
$= (2x)^2 + 2\times 2x\times 3 + 3^2$
$= 4x^2 + 12x + 9$

$C = (x-5)^2$
$= x^2 - 2\times x\times 5 + 5^2$
$= x^2 - 10x + 25$

$D = (5-7x)^2$
$= 5^2 - 2\times 5\times 7x + (7x)^2$
$= 25 - 70x + 49x^2$

$E = (2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})$
$= (2x)^2 - \sqrt{5}^2$
$= 4x^2 - 5$

$F = (2\sqrt{7}x - 3\sqrt{5})(2\sqrt{7}x + 3\sqrt{5})$
$= (2\sqrt{7}x)^2 - (3\sqrt{5})^2$
$= 28x^2 - 45$

Identités remarquables et factorisation.

$A = x^2 + 6x + 9$
$= x^2 + 2\times x\times 3 + 3^2$
$= (x+3)^2$

$B = 25x^2 + 30x + 9$
$= (5x)^2 + 2\times 5x\times 3 + 3^2$
$= (5x+3)^2$

$C = x^2 - 4x - 4$
$= x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2$
$= (x-2)^2$

$D = 49x^2 - 56x + 16$
$= (7x)^2 - 2\times 7x\times 4 + 4^2$
$= (7x-4)^2$

$E = 16x^2 - \frac{1}{4}$
$= (4x)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$= \left(4x - \frac{1}{2}\right)\left(4x + \frac{1}{2}\right)$

$F = 144x^2 - 49$
$= (12x)^2 - 7^2$
$= (12x-7)(12x+7)$

Identités remarquables et double factorisation.

$A = 4x^2 + 4x + 1 - (10x+5)$
$= (2x)^2 + 2\times 2x\times 1 + 1^2 - 5(2x+1)$
$= (2x+1)^2 - 5(2x+1)$
$= (2x+1)(2x+1-5)$
$= (2x+1)(2x-4)$

$B = \frac{1}{2}(-x^2-x)(2x-8) + x^2 - 8x + 16$
$= \frac{1}{2}\times 2(-x^2-x)(x-4) + x^2 - 2\times x\times 4 + 4^2$
$= (-x^2-x)(x-4) + (x-4)^2$
$= (x-4)(-x^2 - \cancel{x} + \cancel{x} - 4)$
$= (x-4)(-x^2-4)$
$= -(x-4)(x^2+4)$

$C = (3x-1)^2 - (2-x)^2$
$= [(3x-1)-(2-x)][(3x-1)+(2-x)]$
$= (3x-1-2+x)(3x-1+2-x)$
$= (4x-3)(2x+1)$

3) Exercice d'application:

1) Développer et simplifier.

$A = (2x+1)^2 - (3x+5)(3x-5)$

$B = (7-2x)^2 + 4x(1-x)$

2) factoriser ce qui suit.

$C = 25x^2 - 4 + (5x-2)(5x+7)$

$D = 9x^2 - 6x + 1 + 5x(3x-1)$

Solution :

1°) $A = (2x+1)^2 - (3x+5)(3x-5)$

$= (2x)^2 + 2\times 2x \times 1 + 1^2 - ((3x)^2 - 5^2)$

$= 4x^2 + 4x + 1 - (9x^2 - 25)$

$= 4x^2 + 4x + 1 - 9x^2 + 25$

$= 4x^2 - 9x^2 + 4x + 1 + 25$

$= -5x^2 + 4x + 26$

$B = (7-2x)^2 + 4x(1-x)$

$= 7^2 - 2\times 7 \times 2x + (2x)^2 + 4x\times 1 - 4x\times x$

$= 49 - 28x + 4x^2 + 4x - 4x^2$

$= \cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} - 28x + 4x + 49$

$= -24x + 49$

$C = 25x^2 - 4 + (5x-2)(5x+7)$

$= (5x)^2 - 2^2 + (5x-2)(5x+7)$

$= (5x-2)(5x+2) + (5x-2)(5x+7)$

$= (5x-2)[(5x+2) + (5x+7)]$

$= (5x-2)(5x+2+5x+7)$

$= (5x-2)(10x+9)$

$D = 9x^2 - 6x + 1 + 5x(3x-1)$

$= (3x)^2 - 2\times 3x \times 1 + 1^2 + 5x(3x-1)$

$= (3x-1)^2 + 5x(3x-1)$

$= (3x-1)(3x-1+5x)$

$= (3x-1)(8x-1)$