Chapitre ④ : Equation d'une droite

I – L'équation réduite d'une droite :

1) Définition :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, chaque droite admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$

* m : est appelé le coefficient directeur (ou la pente) de la droite.
* p : est appelé l'ordonnée à l'origine

2) Exemples :

a – Exemple ① :

* $(D) : y = 2x - 3$ est l'équation réduite de la droite (D) de pente $m = 2$ et d'ordonnée à l'origine $p = -3$
* $(\Delta) : y = -x$ est l'équation réduite de la droite (Δ) de pente $m = -1$ et d'ordonnée à l'origine $p = 0$

b – Exemple ② :

On considère la droite (D) telque :

$(D) : 2y + 3x - 1 = 0$

On a $2y + 3x - 1 = 0$ on isole y

$2y = -3x + 1$

$y = \dfrac{-3x + 1}{2}$

$(D) : y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$

C'est l'équation réduite de la droite (D) de pente $m = -\dfrac{3}{2}$ et l'ordonnée à l'origine $p = \dfrac{1}{2}$

c – Exemple ③ : construction d'une droite définie par son équation réduite :

On considère la droite $(D) : y = -2x + 3$

pour construire la droite (D), il suffit de déterminer deux points différents de cette droite.

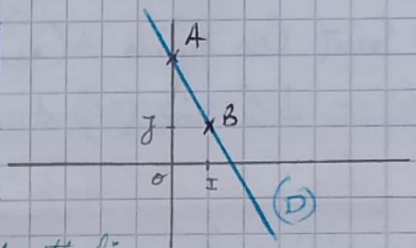
On prend par exemple :

$x = 0$ donc : $y = -2 \times 0 + 3 = 3$

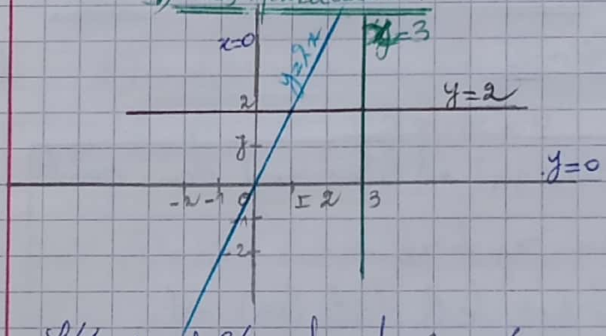
$x = 1$ donc $y = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1$

On considère le tableau suivant :

x	0	1
y	3	1
$M(x;y)$	$A(0,3)$	$B(1,1)$



3) Cas particulier :



* L'équation de l'axe des abscisses est $y = 0$
* L'équation de l'axe des ordonnées est : $x = 0$
* L'équation de la droite parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) et passante par le point $M(a;b)$ est : $y = b$
* L'équation de la droite parallèle à l'axe des ordonnées (verticale) et passante par le point $M(a,b)$ est : $x = a$
* L'équation de la droite passante par l'origine du repère s'écrit sous la forme $y = mx$ (l'ordonnée à l'origine est nulle)

4) Remarques importantes

1) Un point appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite

Exemple : Soient $(D): y = 2x - 3$ et $A(2,1)$

On a $2x_A - 3 = 2\times 2 - 3 = 4 - 3 = 1 = y_A$

Alors $A \in (D)$

2) Soient les points $A(a, y_A)$ et $B(a, y_B)$

l'équation de la droite (AB) est : $x = a$

3) Soient les points $A(x_A, b)$ $B(x_B, b)$

l'équation de la droite (AB) est : $y = b$

II - Détermination de l'équation d'une droite :

1) Pente d'une droite définie par deux points :

a - prop ① :

> Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points tel que $x_A \neq x_B$
>
> Donc la pente de la droite (AB) est :
>
> $$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Remarque : $m = \dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$

En gardant l'ordre.

b- **Exemple :**

On considère $A(-1; -3)$ et $B(-4; 0)$

La pente de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-(-3)}{-4-(-1)} = \frac{3}{-3} = -1$$

2) Détermination de l'équation réduite d'une droite définie par deux points :

$\Rightarrow$ Déterminons l'équation réduite de la droite (AB) tel que : $A(1; -2)$ et $B(-2; 3)$

* L'équation réduite de la droite (AB) s'écrit sous la forme : $(AB): y = mx + p$

On a $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-(-2)}{-2-1} = \dfrac{5}{-3} = -\dfrac{5}{3}$

donc : $(AB): y = -\dfrac{5}{3}x + p$

* Détermination de p

On a $A \in (AB)$

donc : $y_A = -\dfrac{5}{3}x_A + p$

$-2 = -\dfrac{5}{3}\times 1 + p$

$-2 = -\dfrac{5}{3} + p$

$p = -2 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{-6+5}{3} = -\dfrac{1}{3}$

Alors : $\boxed{(AB): y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}}$

3) Détermination de l'équation réduite d'une droite définie par sa pente et un point :

Déterminons l'équation réduite de la droite (Δ) de pente 3 et qui passe par le point $E(2; -1)$

* On a l'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit sous la forme : $(\Delta): y = 3x + p$

* Détermination de p :

On a : $E \in (\Delta)$

donc : $y_E = 3x_E + p$

$-1 = 3\times 2 + p$

$-1 = 6 + p$

$p = -1 - 6 = -7$

Alors l'équation réduite de la droite (Δ) est : $\boxed{(\Delta): y = 3x - 7}$

4) Exercice d'application :

Soit $A(1; 1)$ et $B(2; -1)$

Montrer que l'équation réduite de la droite (AB) est : $y = -2x + 3$

$\Rightarrow$ **Solution**

Méthode ① : Vérification :

On a $\begin{cases} -2x_A + 3 = -2\times 1 + 3 = -2 + 3 = 1 = y_A \\ -2x_B + 3 = -2\times 2 + 3 = -4 + 3 = -1 = y_B \end{cases}$

Donc les points A et B vérifient l'équation $y = -2x + 3$

Alors : $\boxed{(AB): y = -2x + 3}$

* Méthode ②: Calcul:

On a $(AB): y = mx + p$

On a: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-1}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$

donc $(AB): y = -2x + p$

or $A \in (AB)$ donc $y_A = -2x_A + p$

$1 = -2 \times 1 + p$

$1 = -2 + p$

$p = 1 + 2 = 3$

Alors: $\boxed{(AB): y = -2x + 3}$

III _ Parallélisme et orthogonalité de deux droites:

1) Condition de parallélisme de deux droites:

a _ Propo ②:

Soient (D) et (Δ) deux droites telque:

$(D): y = mx + p$ et $(\Delta): y = m'x + p'$

* $(D) // (\Delta)$ est équivalent à $m = m'$

Autrement dit: Deux droites sont parallèles si et seulement si ils ont la même pente.

b _ Exemple:

On considère les deux droites:

$(D_1): y = -2x + 1$ et $(D_2): y = -2x + 5$

On a: $(D_1) // (D_2)$ car ils ont même pente -2

c _ Exercice d'application:

On considère la droite $(D): y = 2x - 1$

1) Est-ce que $A(-1; 2) \in (D)$

2) Déterminer l'équation réduit de la droite (Δ) passant par A et parallèle à (D)

* Solution:

1) On a $2x_A - 1 = 2(-1) - 1 = -2 - 1 = -3 \neq 2$

donc $A \notin (D)$

2) L'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit sous la forme: $(\Delta): y = mx + p$

puisque $(D) // (\Delta)$ donc $m = 2$

Alors: $(\Delta): y = 2x + p$

Déterminons p:

On a $A \in (\Delta)$

donc $y_A = 2x_A + p$

$2 = 2 \times (-1) + p$

$2 = -2 + p$

$p = 2 + 2 = 4$

Alors: $\boxed{(\Delta): y = 2x + 4}$

2) Condition d'orthogonalité de deux droites:

a _ Propo ③:

Soient (D) et (Δ) deux droites telque:

$(D): y = mx + p$ et $(\Delta): y = m'x + p'$

* $(D) \perp (\Delta)$ est équivalent à $m \times m' = -1$

* Autrement dit: Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes est égale à -1

b _ Exemple:

On considère les deux droites:

$(D): y = -\frac{2}{3}x + 1$ et $(D'): 2y - 3x + 8 = 0$

On a $2y - 3x + 8 = 0 \Rightarrow 2y = 3x - 8$

$\Rightarrow y = \frac{3x - 8}{2}$

Alors $(D'): y = \frac{3}{2}x - 4$

On a $\frac{3}{2} \times \frac{-2}{3} = -1$

Donc $\boxed{(D) \perp (D')}$

C - Exercice d'application :

On considère la droite (D) : $y = -4x + 3$

1) Montrer que $A(0;-1) \notin (D)$

2) Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) passante par le point A et perpendiculaire à (D)

3) On considère la droite (D') : $x - 4y - 1 = 0$

Montrer que : $(D) \perp (D')$

Solution :

1) On a $-4x_A + 3 = -4 \times 0 + 3 = 3 \neq -1$

donc $A \notin (D)$

2) L'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit sous la forme : (Δ) : $y = mx + p$

On a $(\Delta) \perp (D)$

donc $m \times -4 = -1 \Rightarrow m = \frac{-1}{-4}$

$\Rightarrow m = \frac{1}{4}$

Alors $y = \frac{1}{4}x + p$

Déterminons p :

On a $A \in (\Delta)$

donc $y_A = \frac{1}{4}x_A + p$

$-1 = \frac{1}{4} \times 0 + p$

$p = -1$

Alors : $\boxed{(\Delta) : y = \frac{1}{4}x - 1}$

3) On a : (D') : $x - 4y - 1 = 0$

$\Rightarrow -4y = -x + 1$

$y = \frac{-x+1}{-4} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

donc : (D') : $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

on a : $-4 \times \frac{1}{4} = -1$ donc $\boxed{(D) \perp (D')}$