Calcul littéral (partie 2)

Chapitre 8

I – Équations « produit »

« Règle du produit nul »

a et b sont des nombres ou des expressions. Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Définition

Une équation produit nul est une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ dans laquelle a, b, c et d des nombres.

Méthode (résoudre une équation produit nul)

On veut résoudre l'équation $(4x + 8)(3x - 21) = 0$.

D'après la règle du produit nul, on doit résoudre : ⟵ On cite la *règle du produit nul*

$4x + 8 = 0$ ou $3x - 21 = 0$ ⟵ On écrit les deux équations à résoudre

On résout <u>séparement</u> les deux équations

$$\begin{aligned} 4x + 8 &= 0 \\ 4x \cancel{+8} \cancel{-8} &= 0 - 8 \\ 4x &= -8 \\ \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} &= \frac{-8}{4} \\ x &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - 21 &= 0 \\ 3x \cancel{-21} \cancel{+21} &= 0 + 21 \\ 3x &= 21 \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{21}{3} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{-2\,;7\}$ ⟵ On n'oublie pas l'ensemble des solutions (généralement il y en a deux)

Exemple 1 : On souhaite résoudre l'équation $(10x + 4)(6x - 18) = 0$

Réponse : *D'après la règle du produit nul, on doit résoudre :* $10x + 4 = 0$ *ou* $6x - 18 = 0$

$$\begin{aligned} 10x + 4 &= 0 \\ 10x \cancel{+4} \cancel{-4} &= 0 - 4 \\ 10x &= -4 \\ \frac{\cancel{10}x}{\cancel{10}} &= \frac{-4}{10} = -0,4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6x - 18 &= 0 \\ 6x \cancel{-18} \cancel{+18} &= 0 + 18 \\ 6x &= 18 \\ \frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} &= \frac{18}{6} = 3 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{-0,4\,;3\}$.

Exemple 2 : On souhaite résoudre l'équation $13x(2x + 1) = 0$

Réponse : *D'après la règle du produit nul, on doit résoudre :* $13x = 0$ *ou* $2x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} 13x &= 0 \\ \frac{\cancel{13}x}{\cancel{13}} &= \frac{0}{13} \\ x &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 1 &= 0 \\ 2x \cancel{+1} \cancel{-1} &= 0 - 1 \\ 2x &= -1 \\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{-1}{2} = -0,5 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{-0,5\,;0\}$.

ATTENTION !!!

Dans l'ensemble solution, on écrit toujours les nombres dans l'ordre croissant !

Oral : 14, 21 p. 30	En classe : 56 p. 33 + 2 p. 29	À la maison : 57, 58, 59 p. 33 + 3, 4 p. 29

II – Équations carrées

Propriété

L'équation $x^2 = a$, où a un nombre *positif* admet exactement deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple (1) *: On souhaite résoudre l'équation* $x^2 = 49$

Réponse :

$x^2 = 49$ *est une équation carrée : ses solutions sont* $x = \sqrt{49} = 7$ *ou* $x = -\sqrt{49} = -7$.
Donc $\mathscr{S} = \{-7\,;7\}$.

Exemple (2) *: On souhaite résoudre l'équation* $x^2 = 2$

Réponse :

$x^2 = 2$ *est une équation carrée : ses solutions sont* $x = \sqrt{2}$ *ou* $x = -\sqrt{2}$.
Donc $\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right\}$.

Exemple (3) *: On souhaite résoudre l'équation* $x^2 = \dfrac{3}{4}$

Réponse :

$x^2 = \dfrac{3}{4}$ *est une équation carrée : ses solutions sont* $x = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *ou* $x = -\sqrt{\dfrac{3}{4}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Propriété

Une équation carré de la forme $x^2 = a$, où a est un nombre admet :

- exactement deux solutions lorsque $a > 0$,
- exactement une solution lorsque $a = 0$,
- aucune solution lorsque $a < 0$.

III – Équations plus compliquées

1. Équations du premier degré

Méthode (RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ)

1. S'il y a des parenthèses, on les élimine (par exemple en développant).
2. S'il y a des membres de la famille des x à droite, on les réduit en un seul, puis on applique le « principe de la balance » (avec + ou −) pour l'annuler (et le faire apparaître à gauche).
3. S'il y a des membres de la famille des nombres à gauche, on les réduit en un seul, puis on applique le « principe de la balance » (avec + ou −) pour l'annuler (et le faire apparaître à droite).
4. Il ne reste plus qu'une seule opération ($\times$ ou $\div$) que l'on simplifie en appliquant le « principe de la balance » (avec $\times$ ou $\div$).
5. On n'oublie pas d'écrire l'ensemble solution.

Exemple : On souhaite résoudre l'équation $8(x+2)=6x-8$.

① On développe

On doit faire disparaître le 6x à droite

② On ne veut que des nombres à droite du =

On doit faire disparaître le +3 à gauche

③ On ne veut que des x à gauche du =

On doit faire disparaître le 2 devant le x à gauche

④ On veut x tout seul

$$\begin{aligned}
8\times x+8\times 2 &= 6x-8\\
8x+16-6x &= 6x-8-6x\\
2x+16 &= -8\\
2x+16-16 &= -8-16\\
2x &= -24\\
\frac{2x}{2} &= \frac{-24}{2}\\
x &= -12
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\{-12\}$.

■ **Exercice :** Résoudre l'équation $7x-13=10x-9$.

Solution :

$$\begin{aligned}
7x-13 &= 10x-9\\
7x-13-10x &= 10x-9-10x\\
-3x-13 &= -9\\
-3x-13+13 &= -9+13\\
-3x &= 4\\
\frac{-3x}{-3} &= \frac{4}{-3}\\
x &= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Oral :	En classe :	À la maison :
13 p. 30	43, 46, 48 p. 32 + 54 p. 33	44, 45, 47, 49, 50 p. 32 + 55 p. 33

2. Quand la méthode ne fonctionne pas

Souvent, pour résoudre certaines équations, il faut se ramener à un type d'équation qu'on sait résoudre. Pour cela il faut utiliser les outils suivants : réduction, développement ou factorisation.

Exemple 1 : On souhaite résoudre l'équation $(8x-5)^2-49=0$.

Réponse :

$$\begin{aligned}
(8x-5)^2-49 &= 0\\
(8x-5)^2-7^2 &= 0 \quad \longleftarrow \text{On fait apparaître l'IR n°3}\\
\big((8x-5)-7\big)\big((8x-5)+7\big) &= 0 \quad \longleftarrow \text{On factorise}\\
(8x-5-7)(8x-5+7) &= 0\\
(8x-12)(8x+2) &= 0
\end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, on doit résoudre :

$$\begin{aligned}
8x-12 &= 0\\
8x-12+12 &= 0+12\\
\frac{8x}{8} &= \frac{12}{8}\\
x &= \frac{3}{2}
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
8x+2 &= 0\\
8x+2-2 &= 0-2\\
\frac{8x}{8} &= \frac{-2}{8}\\
x &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\left\{-\frac{1}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right\}$.

Exemple 2 : On souhaite résoudre l'équation $(4x+3)^2 = 16x^2+5x-1$

Réponse :

$$\begin{aligned}
(4x+3)^2 &= 16x^2+5x-1 \\
(4x)^2+2\times 4x\times 3+3^2 &= 16x^2+5x-1 \quad \longleftarrow \textit{On développe avec l'IR ①} \\
16x^2+24x+9 &= 16x^2+5x-1 \\
16x^2+24x+9-16x^2 &= 16x^2+5x-1-16x^2 \\
24x+9 &= 5x-1 \\
24x+9-5x &= 5x-1-5x \\
19x+9 &= -1 \\
19x+9-9 &= -1-9 \\
19x &= -10 \\
\frac{19x}{19} &= \frac{-10}{19} \\
x &= -\frac{10}{19}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \left\{-\frac{10}{19}\right\}$.

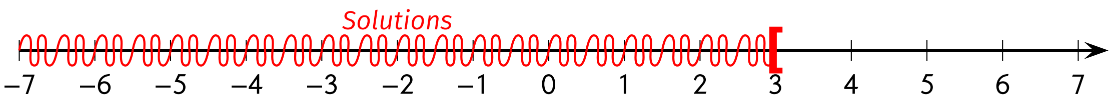
Oral :	En classe :	À la maison :
–	60 p. 33	61, 62 p. 33

IV – Inéquations

1. Inégalité et représentation graphique

Exemple 1 : Représenter l'ensemble des nombres x *qui vérifient* $x < 3$

Réponse :

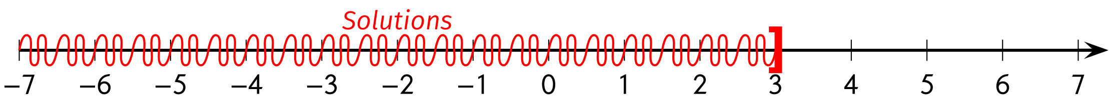


Remarque

Le crochet n'est pas "tourné" vers les solutions car x ne peut pas être égal à 3 (symbole $<$).

Exemple 2 : Représenter l'ensemble des nombres x *qui vérifient* $x \leqslant 3$

Réponse :

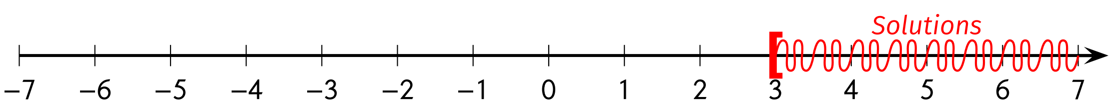


Remarque

Le crochet est cette fois "tourné" vers les solutions car x peut être égal à 3 (symbole $\leqslant$).

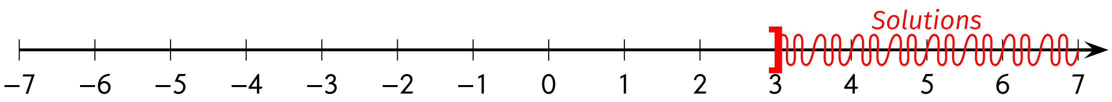
Exemple 3 : Représenter l'ensemble des nombres x *qui vérifient* $x \geqslant 3$

Réponse :



Exemple 4 : Représenter l'ensemble des nombres x qui vérifient $x > 3$

Réponse :



Oral :	En classe :	À la maison :
–	–	65 p. 33

2. Résoudre une inéquation

Méthode (RÉSOUDRE UNE INÉQUATION)

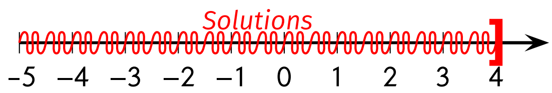
On utilise la même méthode que pour les équations avec deux différences :

- **On change le sens de l'inégalité quand on divise (ou multiplie) par un nombre négatif à l'étape 4.**
- **On représente les solutions sur une droite graduée.**

Le plus simple pour bien comprendre est de voir plusieurs exemples :

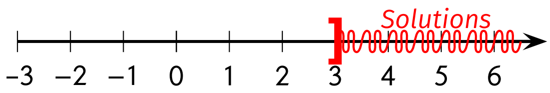
Exemple 1 : On veut résoudre : $x + 5 \leqslant 9$:

$$\begin{array}{rcl} x+5 & \leqslant & 9 \\ x+5-5 & \leqslant & 9-5 \\ x & \leqslant & 4 \end{array}$$



Exemple 2 : On veut résoudre : $x - 5 > -2$:

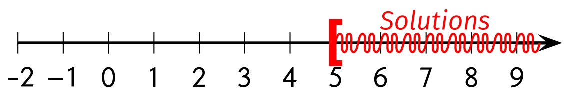
$$\begin{array}{rcl} x-5 & > & -2 \\ x-5+5 & > & -2+5 \\ x & > & 3 \end{array}$$



Exemple 3 : On veut résoudre $4x \geqslant 20$:

$$\begin{array}{rcl} 4x & \geqslant & 20 \\ \dfrac{4x}{4} & \geqslant & \dfrac{20}{4} \\ x & \geqslant & 5 \end{array}$$

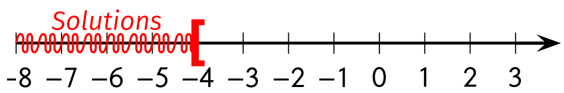
On ne change pas le sens de l'inégalité car on divise par un nombre positif



Exemple 4 : On veut résoudre $-2x > 8$:

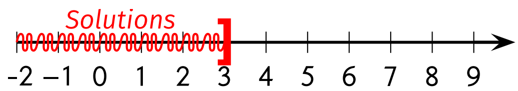
$$\begin{array}{rcl} -2x & > & 8 \\ \dfrac{-2x}{-2} & < & \dfrac{8}{-2} \\ x & < & -4 \end{array}$$

On change le sens de l'inégalité car on divise par un nombre négatif



Exemple 5 : On veut résoudre $10x - 4 \leqslant 26$:

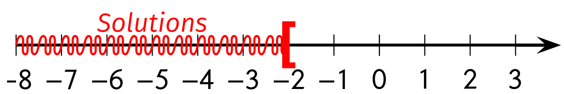
$$\begin{array}{rcl} 10x-4+4 & \leqslant & 26+4 \\ 10x & \leqslant & 30 \\ \dfrac{10x}{10} & \leqslant & \dfrac{30}{10} \\ x & \leqslant & 3 \end{array}$$



Exemple 6 : On veut résoudre $-5x + 7 > 8$:

$$\begin{array}{rcl} -5x+7-7 & > & 17-7 \\ -5x & > & 10 \\ \dfrac{-5x}{-5} & < & \dfrac{10}{-5} \\ x & < & -2 \end{array}$$

On change le sens de l'inégalité car on divise par un nombre négatif



Oral :	En classe :	À la maison :
15, 16, 17, 27 p. 30	67, 70 p. 33	68, 69, 71 p. 33

V – Résoudre des problèmes

Méthode (RÉSOUDRE DES PROBLÈMES)

1. **Choix de l'inconnue,**
2. **Mise en (in)équation,**
3. **Résolution de l'(in)équation,**
4. **Phrase de conclusion.**

■ **EXERCICE :** Un vidéo-club propose deux formules de location de DVD :

— Formule A : abonnement d'un an pour 18 €, puis 3,5 € par DVD loué.

— Formule B : sans abonnement, 5 € par DVD loué.

À partir de combien de DVD loués dans l'année a-t-on intérêt à choisir la formule A ?

Solution :

- Choix de l'inconnue : x représente le nombre de DVD loués.
- Mise en inéquation :
  Montant d'un an d'abonnement avec la formule A : $18 + 3,5x$
  Montant d'un an d'abonnement avec la formule B : $5x$
  On cherche quand le montant de l'abonnement avec la formule A est avantageux, c'est-à- dire quand il coûte moins cher que l'abonnement avec la formule.
  On doit donc résoudre : $18 + 3,5x \leqslant 5x$.
- Résolution de l'inéquation :

$$\begin{aligned} 18 + 3,5x &\leqslant 5x \\ 18 + 3,5x - 3,5x &\leqslant 5x - 3,5x \\ 18 &\leqslant 1,5x \\ 18 \div 1,5 &\leqslant 1,5x \div 1,5 \\ 12 &\leqslant x \end{aligned}$$

- Conclusion : On a intérêt à choisir l'abonnement A si on loue 12 DVD ou moins dans l'année (et donc l'abonnement B à partir de 13 DVD loués).

■ **EXERCICE :** Pendant la période estivale, un marchand de glaces a remarqué qu'il dépensait 75 € pour faire, en moyenne, 150 glaces.
Sachant qu'une glace est vendue 2,50 €, combien doit-il vendre de glaces au minimum dans la semaine pour avoir un bénéfice supérieur à 76 €?

Solution :

- On note x le nombre de glaces vendues dans la semaine.
- Mise en inéquation :
  Bénéfice de la semaine : $2,5x - 75$
  On veut que ce bénéfice soit supérieur à 76 €, cela se traduit donc par l'inéquation : $2,5x - 75 > 76$.
- Résolution de l'inéquation :

$$\begin{aligned} 2,5x - 75 &> 76 \\ 2,5x - 75 + 75 &> 76 + 75 \\ 2,5x &> 151 \\ 2,5x \div 2,5 &> 151 \div 2,5 \\ x &> 60,4 \end{aligned}$$

- Conclusion : le marchand devra vendre au moins 61 glaces pour faire un bénéfice supérieur à 76 €dans la semaine.

Oral : –	**En classe :** 72 p. 33	**À la maison :** 74, 75 p. 34

Tâche complexe : 111 p. 38