Chapitre ①: Equations et inéquations

I – Equations du premier degré à une inconnue:

1) Définition:

Soient a, b et x des nombres réels.
Toute égalité de la forme : $ax+b=0$
s'appelle équation du premier degré à une inconnue x.

2) Exemples:

Toutes les égalités $2x+3=0$ et $\sqrt{2}x-\frac{1}{2}=0$
$-7x-5=4$ et $2x+8=\sqrt{3}x+1$
s'appelle des équations du premier degré à une inconnue x

* Remarque:

→ Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs possibles de l'inconnue qui vérifient l'équation (s'ils existent)

→ chacune de ces valeurs est appelée solution de l'équation.

3) Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue

a – Règle:

→ Dans une équation on peut transmettre un terme d'un côté vers l'autre côté à condition de changer le signe de ce terme.

→ Pour résoudre une équation, on place les termes inconnus dans un côté et les termes connus dans l'autre côté en appliquant la règle précédente

b – Cas et techniques de résolution:

Cas ①: Equation de type $ax+b=c$

1) L'équation $-3x+4=0$ est respectivement équivalente à

$$-3x=-4$$
$$x=\frac{-4}{-3} \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

Donc cette équation admet une unique solution $\frac{4}{3}$

2) L'équation $5(x+1)=2x-1$ est respectivement équivalente à

$$5x+5=2x-1$$
$$5x-2x=-1-5$$
$$3x=-6$$
$$x=\frac{-6}{3}=-2$$

Donc cette équation admet une unique solution -2

3) L'équation $2x+5=2(x+1)+3$ est respectivement équivalent à

$$2x+5=2x+2+3$$
$$2x-2x=5-5$$
$$0x=0$$

Donc tous les nombres réels sont solutions de cette équation.

4) L'équation $3(2x-1)=6x+7$ est respectivement équivalent à

$$6x-3=6x+7$$
$$6x-6x=7+3$$
$$0x=10$$

Ce qui est impossible

Donc cette équation n'admet pas de solution

Cas ②: Equation de type $(ax+b)(cx+d)=0$

* Propr: Le produit nul

Les solutions de l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$ sont les solutions des équations

$ax+b=0$ et $cx+d=0$

1) L'équation $(x+1)(2x-3)=0$ est respectivement équivalente à

$$x+1=0 \text{ ou } 2x-3=0$$
$$x=-1 \text{ ou } 2x=3$$
$$x=-1 \text{ ou } x=\frac{3}{2}$$

Donc cette équation admet deux solutions -1 et $\frac{3}{2}$

2) L'équation $x^2-7x=0$ est respectivement équivalente à

$$x(x-7)=0$$
$$x=0 \text{ ou } x-7=0$$
$$x=0 \text{ ou } x=7$$

Donc cette équation admet deux solutions 0 et 7.

Cas ③ : Équation fractionnaires

Règle : Pour résoudre ce type d'équation, on réduit au même dénominateur.

1) L'équation $\frac{2x+1}{5}=\frac{x-1}{3}$ est respectivement équivalente à

$$3(2x+1)=5(x-1)$$
$$6x+3=5x-5$$
$$6x-5x=-5-3$$
$$x=-8$$

Donc cette équation admet unique solution -8

2) L'équation $\frac{2x+1}{5}-2=\frac{x-1}{3}$ est respectivement équivalente à

$$\frac{3(2x+1)-30}{15}=\frac{5(x-1)}{15}$$
$$6x+3-30=5x-5$$
$$6x-5x=-5-3+30$$
$$x=22$$

Donc cette équation admet une unique solution 22

* Cas ④ : Equations de type $x^2=a$

→ Remarques : Pour résoudre ce type d'équation on rappelle l'identité ③ : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

* Propo : Les solutions de l'équation $x^2=a$

- Si $a=0$, l'équation admet une unique solution 0
- Si $a>0$, l'équation admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a<0$, alors cette équation n'admet pas de solutions.

1) L'équation $x^2+12=2$ est respectivement équivalente à $x^2=2-12$

$$x^2=-10$$

Donc cette équation n'admet pas de solution

2) L'équation $(2x-1)^2-9=0$ est respectivement équivalente à

$$(2x-1)^2-3^2=0$$
$$(2x-1-3)(2x-1+3)=0$$
$$(2x-4)(2x+2)=0$$
$$2x-4=0 \text{ ou } 2x+2=0$$
$$2x=4 \text{ ou } 2x=-2$$
$$x=\frac{4}{2}=2 \text{ ou } x=\frac{-2}{2}=-1$$

Donc cette équation admet deux solutions -1 et 2

* Cas ⑤ : Equations avec factorisation

si on a facteur commun ou avec indentités remarquables

* L'équation $2x(x+\sqrt{2})-\sqrt{3}(x+\sqrt{2})=0$ est respectivement équivalente à

$$(x+\sqrt{2})(2x-\sqrt{3})=0$$
$$x+\sqrt{2}=0 \text{ ou } 2x-\sqrt{3}=0$$
$$x=-\sqrt{2} \text{ ou } x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc cette équation admet deux solutions $-\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$

* Suite (Regardez la suite)

* **Cas ⑥ : Résolution d'une équation avec développement si on a les parenthèses et pas de facteur commun.**

* L'équation $x(x+3) = x^2 - 15$ est respectivement équivalente à

$$x^2 + 3x = x^2 - 15$$
$$x^2 + 3x - x^2 = -15$$
$$x = \frac{-15}{3} = -5$$

Donc cette équation admet une unique solution -5

II - Résolution des problèmes :

1) Mise en équation de problèmes :

a - Règle :

Les étapes de résolution d'un problème sont :
1) Choix de l'inconnue
2) Mise en équation : transformation des données en une équation.
3) Résolution de l'équation.
4) Retour au problème : vérification et réponse au question.

2) Exemple :

La somme des âges de Aziz, de sa mère et de sa grande-mère est 90 ans. L'âge de la grande-mère est le double de l'âge de la mère et l'âge de Aziz est le tiers de celui de sa mère.

Quel est l'âge de chacun ?

⇒ Solution :

1) Choix de l'inconnue

Soit x l'âge de la mère

2) Mise en équation :

* L'âge de la mère est x
* L'âge de la grande mère est $2x$ car c'est le double de l'âge de la mère
* L'âge de Aziz est $\frac{x}{3}$ car c'est le tiers de l'âge de la mère.

et puisque de leurs âges est 90 ans, alors l'équation est : $x + 2x + \frac{x}{3} = 90$

3) Résolution de l'équation :

L'équation $x + 2x + \frac{x}{3} = 90$ est respectivement équivalente à

$$\frac{3x + 6x + x}{3} = \frac{270}{3}$$
$$10x = 270$$
$$x = \frac{270}{10} = 27$$

Donc la solution de cette équation est 27

4) Retour au problème :

On a $27 + 2 \times 27 + \frac{27}{3} = 27 + 54 + 9 = 90$

Donc la solution est vraie

* L'âge de la mère est : 27 ans
* L'âge de la grande mère est 54 ans
* L'âge de Aziz est : 9 ans.

III - Inéquations du premier degré à une inconnue :

1) Définition :

Soient a, b et x des nombres réels

Toute inégalité de la forme $ax + b > 0$ ou $ax + b \geq 0$ ou $ax + b < 0$ ou $ax + b \leq 0$ s'appelle inéquation du premier degré à une inconnue x.

* Remarques :

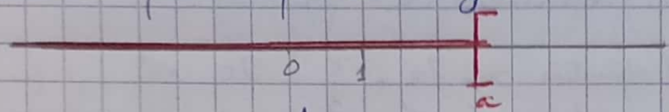
→ Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité.

2) Exemples :

* Les inégalités $2x + 5 < 0$ et $\sqrt{2}x - 7 \geq 0$ et $3x + 7 > \frac{2}{3}x - 14$ sont des inéquations du premier degré à une inconnue x

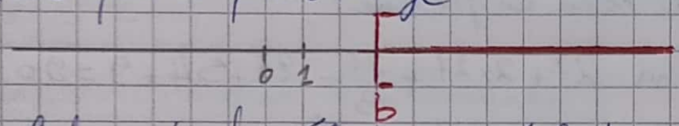
3) Représentation des solutions d'une inéquation sur une droite graduée :

* On représente l'écriture $x < a$ sur la droite par la partie rouge



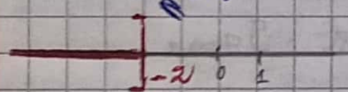
a ne fait pas partie des réels x qui vérifient $x < a$
le crochet est orienté dans le sens opposé des solutions.

* On représente l'écriture $x \geq b$ sur la droite par la partie rouge

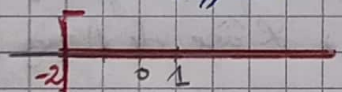


b fait partie des réels x qui vérifient $x \geq b$
le crochet est orienté dans le sens des solutions

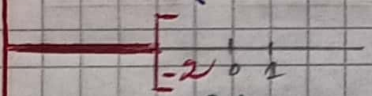
$x \leq -2$



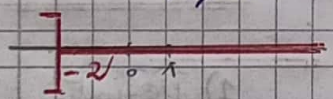
$x \geq -2$



$x < -2$



$x > -2$



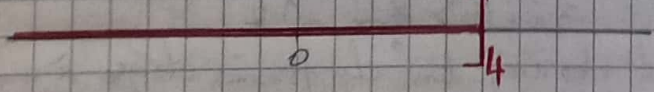
4) Résolution des inéquations

* Cas ① : Si $a > 0$; alors les solutions de l'inéquation $ax+b<0$ est $x < \frac{-b}{a}$
(On change pas le symbole)

→ L'inéquation $4x-5 \leq 2x+3$ est respectivement équivalente à

$$4x-2x \leq 3+5$$
$$2x \leq 8$$
$$x \leq \frac{8}{2}$$
$$x \leq 4$$

Donc tous les nombres réels inférieurs ou égaux à 4 sont solutions de cette inéquation

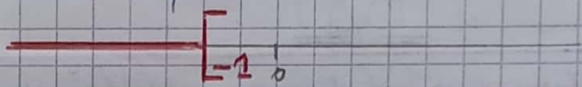


* Cas ② : Si $a<0$; alors les solutions de l'inéquation $ax+b<0$ sont $x > \frac{-b}{a}$
On inverse le symbole.

→ L'inéquation $2x-6 > 7x-1$ est respectivement équivalente à

$$2x-7x > -1+6$$
$$-5x > 5$$
$$x < \frac{5}{-5}$$
$$x < -1$$

Donc tous les nombres réels strictement inférieurs à -1 sont solutions de cette inéquation.



* Cas ③ : Inéquations n'addmetant pas de solutions.

→ L'inéquation $\frac{2x-5}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{6}$ est respectivement équivalente à

$$\frac{2(2x-5)-3(x+1)}{6} \geq \frac{x}{6}$$
$$4x-10-3x-3 \geq x$$
$$4x-3x-x \geq 10+3$$
$$0 \geq 13$$

ce qui est impossible

Donc cette inéquation n'admet pas de solution.

* Cas ④ : Inéquations addmettant infinité de solutions.

→ L'inéquation $5(2x-1)-7x < 3(x+1)$ est respectivement équivalente à

$$10x-5-7x < 3x+3$$
$$10x-7x-3x < 3+5$$
$$0 < 8$$

ce qui est vrai

Donc tous les nombres réels sont solutions de cette inéquation.

5) Problème et inéquations.

a - Règle :

Pour résoudre un problème attaché à une inéquation, on suit les étapes suivantes :

1) Choix de l'inconnue

2) Mise en inéquation : Transformation des données en une inéquation

3) Résolution de l'inéquation

4) Retour au problème : vérification et réponse aux question.

*Remarque : Lorsqu'on emploie au problème des expressions comme (au moins - au plus - moins que - plus que - meilleur que - maximal - minimal ...) alors on utilise les inéquations

b - Exemples

Une agence de location de voitures propose deux tarifs :

- Tarif A : Un forfait de 60DH plus 0,20DH par kilomètre parcouru
- Tarif B : 0,8DH par kilomètre parcouru.

A partir de quelle distance (en km) le Tarif A est plus avantageux (moins cher) pour le client ?

*Solution :

→ Choix de l'inconnue :

Soit x la distance parcourue par le client.

→ Mise en inéquation :

* Pour le Tarif A, le client doit payer (en DH) $60+0,2x$
* Pour le tarif B, le client doit payer (en DH) $0,8x$

Le tarif A est plus avantageux que le tarif B signifie que $60+0,2x<0,8x$

→ Résolution de l'inéquation

L'inéquation $60+0,2x\leq 0,8x$ est respectivement équivalente à

$$0,2x-0,8x\leq -60$$
$$-0,6x\leq -60$$
(car $-0,6<0$)
$$x\geq \frac{-60}{-0,6}$$
$$x\geq 100$$

→ Retour au problème

A partir de 100 km, le tarif A est plus avantageux que le tarif B

Suite : Equations Cas ⑤ :

* L'équation $x^2-6x+9=0$ est équivalente à

$$x^2-2\times x\times 3+3^2=0$$
$$(x-3)^2=0$$
$$x-3=0$$
$$x=3$$

alors cette équation admet une unique solution 3

* L'équation $25x^2+30x+9=0$ est équivalente à

$$(5x)^2+2\times 5x\times 3+3^2=0$$
$$(5x+3)^2=0$$
$$5x+3=0$$
$$x=-\frac{3}{5}$$

alors cette équation admet une unique solution $-\frac{3}{5}$

* L'équation $(x-1)(x+3)+x^2-1=0$ est équivalente à

$$(x-1)(x+3)+(x-1)(x+1)=0$$
$$(x-1)(x+3+x+1)=0$$
$$(x-1)(2x+4)=0$$
$$x-1=0 \text{ ou } 2x+4=0$$
$$x=1 \text{ ou } x=\frac{-4}{2}=-2$$

cette équation admet deux solutions -2 et 1