

1 – Généralités sur les fonctions

a – Définition

Une fonction f de la variable x est un procédé de calcul qui permet d'associer à toute valeur de x une valeur notée $f(x)$.

Le nombre $f(x)$ est appelé l'image de x par la fonction f .

Le nombre x est appelé l'antécédent de $f(x)$ par la fonction f .

b – Remarque :

On note une fonction par une lettre : f, h, s, \dots

c – Exemple : soit ABCD un rectangle de longueur x et de largeur $x - 2$.

✓ Le périmètre de ce rectangle noté $P(x)$ tel que :

$$P(x) = 2(x + x - 2). \text{ Je simplifie : } P(x) = 4x - 4$$

✓ P est une fonction de variable x .

✓ $4x - 4$ est l'images de x par la fonction P .

Si $x = 3$ alors :

✓ Le périmètre de ce rectangle noté $P(3)$ tel que :

$$P(3) = 4 \times 3 - 4 = 12 - 4 = 8.$$

✓ 8 est l'image de 3 par la fonction P et 3 est l'antécédent de 8 par la fonction P .

❖ L'aire de ce rectangle noté $A(x)$ tel que :

$$A(x) = x \times (x - 2). \text{ Je simplifie : } A(x) = x^2 - 2x$$

❖ A est une fonction de variable x

❖ $x^2 - 2x$ est l'images de x par la fonction A

Si $x = 4$ alors :

➤ L'aire de ce rectangle noté $A(4)$ tel que :

$$A(4) = 4 \times (4 - 2) = 4 \times 2 = 8.$$

➤ 8 est l'image de 4 par la fonction A et 4 est l'antécédent de 8 par la fonction A .

d – Application : On considère les deux tableaux suivants :

x	0	1	4	7
$f(x)$	0	2	8	14

x	0	1	4	7
$g(x)$	0	1	16	49

Complète ce qui suit :

✓ L'expression de la fonction f est

✓ 8 estde par ; et 4 est.... de par

✓ L'expression de la fonction g est

✓ 7 estde par ; et 49 est.... de par

Correction :

✓ L'expression de la fonction f : $f: x \rightarrow 2x$.

✓ 8 est l'image de 4 par la fonction f .

4 est l'antécédent de 8 par la fonction f .

✓ L'expression de la fonction g : $g: x \rightarrow x^2$.

✓ 7 est l'antécédent de 49 par la fonction g .

49 est l'image de 7 par la fonction g .

2 – La fonction linéaire

a – Définition

Soit a un nombre réel fixe.

Une fonction f est dite linéaire si elle est de la forme :

$$f: x \rightarrow ax.$$

✓ a désigne le coefficient de linéarité.

✓ ax est l'image de x par la fonction f .

✓ x est l'antécédent de ax par la fonction f .

b – Remarque :

✓ Si f une fonction linéaire de coefficient a alors :

$$a = \frac{f(x)}{x} \text{ pour tout nombre réel } x \text{ non nul.}$$

✓ Une fonction linéaire modélise une situation de proportionnalité : x et $f(x)$ sont proportionnels.

c- Exemple :

Soit f la fonction linéaire de coefficient 4 alors :

L'expression de la fonction f est : $f: x \rightarrow 4x$.

L'image de x par la fonction f est : $f(x) = 4x$.

L'image de $\sqrt{2}$ par la fonction f est : $f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$.

L'image de -1 par la fonction f est :

$$f(-1) = 4 \times (-1) = -4.$$

d-Application :

On considère la fonction suivante : $h: x \rightarrow x(x + 3) - x^2$.

1- Montrons que la fonction h est linéaire.

2- Calculons l'image de $\frac{2}{3}$ par la fonction h .

3- Déterminons l'antécédent de $\sqrt{3}$

Correction :

1- $h: x \rightarrow x^2 + 3x - x^2$ alors $h: x \rightarrow 3x$ d'où h est une fonction linéaire de coefficient 3.

2- $f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$ d'où $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$

3- $f(x) = \sqrt{3}$ signifie que $3x = \sqrt{3}$ d'où $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ alors l'antécédent de $\sqrt{3}$ c'est $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3 – La représentation graphique d'une fonction linéaire

a – Définition :

La représentation graphique d'une fonction linéaire f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$.

b – Propriété :

- ❖ Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire f est la droite qui passe par l'origine du repère et les points de coordonnées $(x, f(x))$.
- ❖ On dit que la représentation de la fonction linéaire f est la droite d'équation réduite $y = ax$

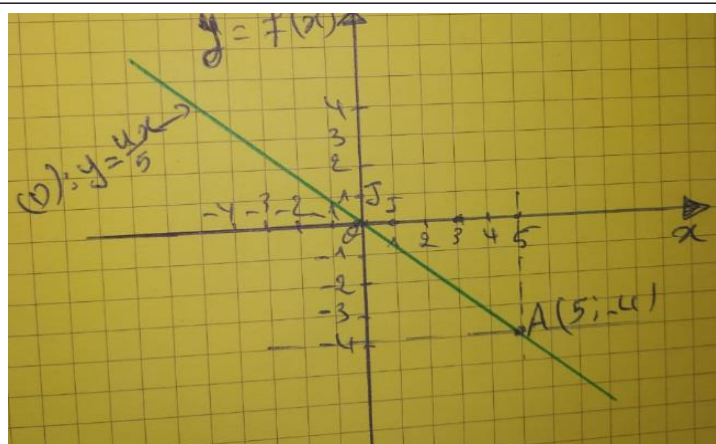
c – Remarque :

On note la représentation graphique d'une fonction f par (C_f) ou par $(d), (D), (\Delta), \dots$

Exercice :

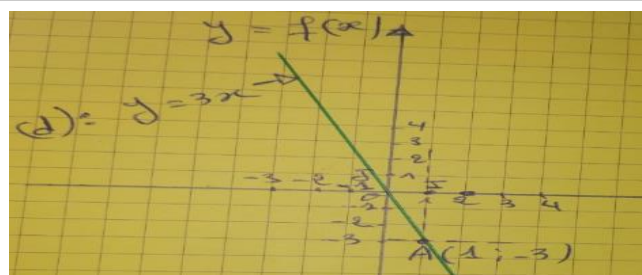
Soit f une fonction linéaire telle que : $f(5) = 4$.

- 1- Déterminons l'expression de $f(x)$ puis calculons $f\left(\frac{-7}{2}\right)$
- 2- Déterminons l'antécédent de -4 .
- 3- Sans faire des calculs calculons $\frac{f(2020)}{2020}$
- 4- Traçons (C_f) la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (O, I, J) .



d – Exemple :

On considère la fonction f telle que $f(x) = -3x$.
 $f(1) = -3 \times 1 = -3$ d'où $f(1) = -3$
 f est une fonction linéaire alors (C_f) passe par $O(0,0)$ et $A(1, -3)$.



Correction :

1- f est une fonction linéaire alors elle s'écrit sous la forme : $f(x) = ax$ avec $a = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(5)}{5} = \frac{4}{5}$

D'où $f(x) = \frac{4}{5}x$

$f\left(\frac{-7}{2}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{-7}{2} = \frac{-14}{5}$

2- Soit k un nombre réel tel que $f(k) = -4$

D'une part on a $f(k) = \frac{4}{5}k$ et d'autre part on a $f(k) = -4$

Alors $\frac{4}{5}k = -4$, je multiplie par $\frac{5}{4}$: $k = -4 \times \frac{5}{4} = -5$

Enfinement l'antécédent de -4 est -5

3- On a : $a = \frac{f(x)}{x}$

si $x = 2020$ alors $\frac{f(2020)}{2020} = \frac{4}{5}$.

4- (C_f) passe par les points : $(x, f(x))$ alors :
 (C_f) passe par $O(0,0)$ et $A(5, -4)$

4 – La fonction affine

a – Définition

Soit a et b deux nombres réels fixes.

Une fonction f est dite affine si elle est de la forme :

$f: x \rightarrow ax + b$.

- ✓ a désigne le coefficient de f .
- ✓ $ax + b$ est l'image de x par la fonction f .
- ✓ x est l'antécédent de $ax + b$ par la fonction f .

b – Remarques

- ❖ une fonction linéaire est une fonction affine.
- ❖ Une fonction affine ne modélise pas une situation de proportionnalité : x et $f(x)$ ne sont pas proportionnels.

c – propriété

Soient x et x' deux nombres réels quelconques ($x \neq x'$).

Si f est une fonction affine de coefficient a alors :

$a = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$

d – Exemples

1- Soit la fonction affine : $f: x \rightarrow 2x - 1$ alors :

- ❖ Le coefficient de f est 2.
- ❖ L'image de 3 est : $f(3) = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$.
- ❖ On note k l'antécédent de 0. ($f(k) = 0$) :
D'une part $f(k) = 2k - 1$ et d'autre part $f(k) = 0$
alors $2k - 1 = 0$ d'où $= \frac{1}{2}$.

L'antécédent de 0 est $\frac{1}{2}$

2- Soit g la fonction affine telles que $g(3) = 5$ et $g(5) = 13$.

❖ Le coefficient de g : $a = \frac{g(5) - g(3)}{5 - 3} = \frac{13 - 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$

❖ L'expression de $g(x)$: $g(x) = 4x + b$

D'une part $g(3) = 4 \times 3 + b = 12 + b$ et d'autre part $g(3) = 5$ alors $12 + b = 5$ d'où $b = -7$

Enfinement $g(x) = 4x - 7$

5 – La représentation graphique d'une fonction affine

a – Propriété:

- ❖ Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine f est la droite qui passe par les points de coordonnées $(x, f(x))$.
- ❖ On dit que la représentation de la fonction affine f est la droite d'équation réduite $y = ax + b$.

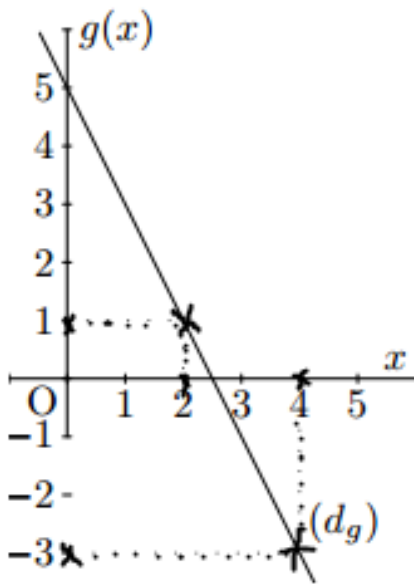
b – Exemple:

g est la fonction affine définie par : $g: x \rightarrow -2x + 5$

$$g(0) = -2 \times 0 + 5 = 5$$

$$g(2) = -2 \times 2 + 5 = -4 + 5 = 1$$

x	0	2
$g(x)$	5	1
$M(x, g(x))$	(0,5)	(2,1)



c – Application

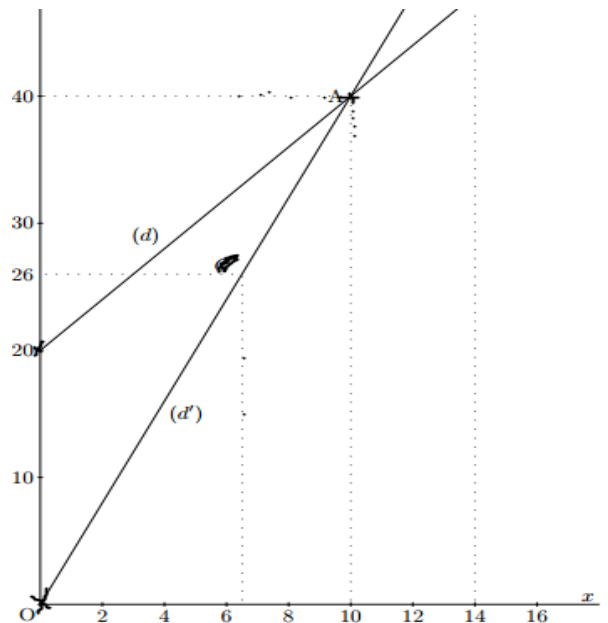
$ABCD$ est un carré de côté x et $EFGH$ est un rectangle de largeur x et longueur $x + 10$.

- 1- Dans un repère, représenté la fonction affine définie par $f: x \rightarrow 2x + 20$ et la fonction linéaire définie par $g: x \rightarrow 4x$.
- 2- Déterminons x pour que le périmètre du carré soit égal au périmètre du rectangle.

Correction

x	0	10
$f(x)$	20	40

x	0	10
$g(x)$	0	40



- 2- $P_{ABCD} = 4x$ et $P_{EFGH} = 2(x + 10) = 2x + 20$
 $P_{ABCD} = P_{EFGH}$ signifie que $f(x) = g(x)$.
 D'après le graphe $x = 10$

6 – cas particuliers

k est un nombre réel constant.

La fonction f définie par : $f: x \rightarrow k$ est appelé fonction constante.

L'image de chaque nombre réel est le nombre k
 la représentation graphique de f est la droite d'équation réduite : $y = k$.

la fonction définie par : $g: x \rightarrow 0$ est appelé fonction nulle. sa représentation graphique est la droite d'équation $y = 0$. (et l'axe des abscisses)

Exemple

soit la fonction f telle que $f: x \rightarrow 3$.

$$f(0) = 3, f(5) = 3, f\left(\frac{3}{7}\right) = 3, f(\sqrt{3}) = 3$$

La représentation de la fonction f est la droite (Δ) d'équation : $y = 3$

soit la fonction g telle que $g: x \rightarrow 0$.

$$g(0) = 0, g(5) = 0, g\left(\frac{3}{7}\right) = 0, g(\sqrt{3}) = 0$$

La représentation graphique de la fonction g est la droite (D) d'équation $y = 0$.

