3ème - Géométrie dans l'espace

Extrait du programme de la classe de 3ème :

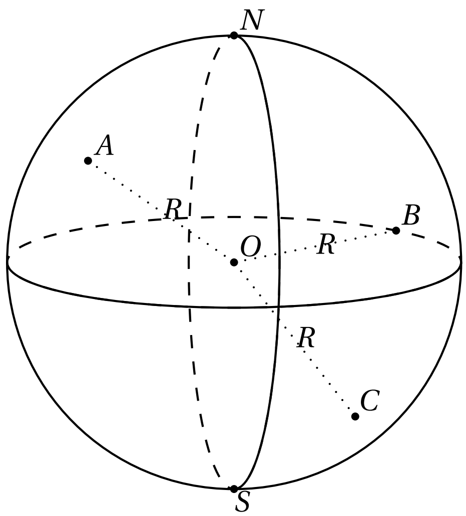
CONTENU	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Sphère	- Savoir que la section d'une sphère par un plan est un cercle. - Savoir placer le centre de ce cercle et calculer son rayon connaissant le rayon de la sphère et la distance du plan au centre de la sphère. - Représenter une sphère et certains de ses grands cercles.	On mettra en évidence les grands cercles de la sphère, les couples de points diamétralement opposés. On examinera le cas particulier où le plan est tangent à la sphère. On fera le rapprochement avec les connaissances que les élèves ont déjà de la sphère terrestre, notamment pour les questions relatives aux méridiens et aux parallèles.
Problèmes de sections planes de solides	- Connaître la nature des sections du cube, du parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face, à une arête. - Connaître la nature des sections de cylindre de révolution par un plan parallèle ou perpendiculaire à son axe. - Représenter et déterminer les sections d'un cône de révolution et d'une pyramide par un plan parallèle à la base.	Des manipulations préalables (sections de solides en polystyrène par exemple) permettent de conjecturer ou d'illustrer la nature des sections planes étudiées. Ce sera une occasion de faire des calculs de longueur et d'utiliser les propriétés rencontrées dans d'autre rubriques ou au cours des années antérieures. À propos de pyramides, les activités se limiteront à celles dont la hauteur est une arête latérale et aux pyramides régulières qui permettent de retrouver les polygones étudiés par ailleurs.

25.1 Sphère et boule ; section d'une sphère par un plan

Définitions

Si O est un point de l'espace et R est un nombre positif donné :

- La **sphère** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O exactement égale à R.
- La **boule** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O inférieure ou égale à R.
- Un **grand cercle** d'une sphère de centre O et de rayon R est un cercle de centre O et de rayon R.



A, B, C sont des points de la sphère, et O est le centre de cette sphère, qui a pour rayon $R = OA = OB = OC$.
Le segments $[NS]$ est un diamètre de la sphère.
Deux grands cercles de la sphère sont tracés ici, dont l'un d'eux a pour diamètre $[NS]$

Si on imagine que cette sphère représente le **globe terrestre**, alors les points N et S seraient les **pôles** Nord et Sud ; le grand cercle qui passe par les deux pôles serait un **méridien**, et l'autre grand cercle (situé dans un plan perpendiculaire à l'axe des pôles) serait l'**équateur**. Tout point de la surface du globe terrestre est repéré par deux nombres, appelés **longitude** (calculée par rapport à un méridien bien particulier, celui de Greenwich) et **latitude** (calculée par rapport à l'équateur) : voir par ailleurs.

Propriétés

Aire d'une sphère, volume d'une boule

Si R est un nombre positif donné :
- L'**aire** d'une sphère de rayon R est égale à $4\pi R^2$.
- Le **volume** d'une boule de rayon R est égal à $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Exemples :

– L'aire d'une sphère de rayon 7 cm est égale à : $4 \times \pi \times 7^2 = 196\pi \simeq 616$ cm^2

– le volume de la boule de même rayon 7 cm est égal à : $\frac{4}{3} \times \pi \times 7^3 = \frac{1372}{3} \times \pi \simeq 1437$ cm^3

Propriété

La **section** d'une sphère par un plan est un **cercle**.

Plus précisément, considérons une sphère de centre O et de rayon R.
On se donne un plan $\mathscr{P}$, et on appelle $[NS]$ le diamètre de la sphère perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Enfin, soit H le point d'intersection de (NS) et de $\mathscr{P}$.

On dit que OH est la **distance du centre O au plan $\mathscr{P}$**. Plusieurs cas se présentent, selon la valeur de la distance OH :

► $\boxed{\text{lorsque } 0 < OH < R}$, la section de la sphère de centre O et de rayon R par le plan $\mathscr{P}$ est un cercle de centre H. Pour tout point M de ce cercle, le triangle HOM est rectangle en H.

Calculons le rayon r de ce cercle en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle HOM rectangle en H :
$OM^2 = HO^2 + HM^2$ soit $R^2 = HO^2 + r^2$
donc $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$

Exemple :
Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre O et de rayon $R = 5$ cm coupée par un plan $\mathscr{P}$ tel que $OH = 3$ cm. La section obtenue est le cercle de centre H et de rayon $r = 4$ cm, car $r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

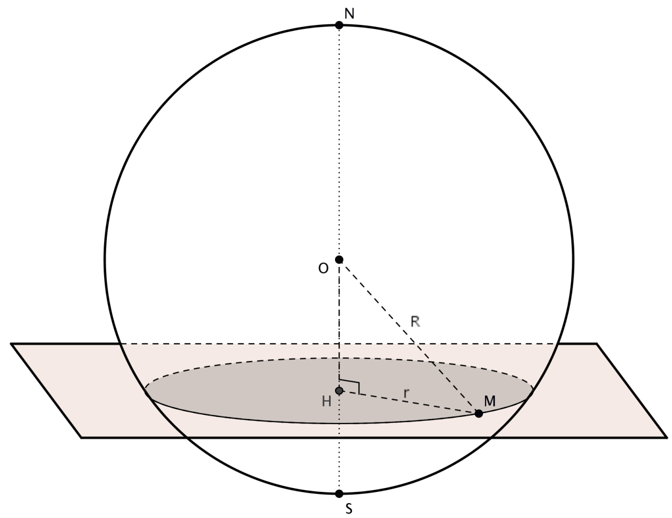


Fig. 1 : cas où $0 < OH < R$

► $\boxed{\text{lorsque } OH = 0}$, le cercle de section a même centre O et même rayon que la sphère : c'est alors un **grand cercle** de la sphère, il partage la sphère en deux **hémisphères** (*voir Fig. 2*)

► $\boxed{\text{lorsque } OH = R}$, le cercle de section a pour rayon 0 : il est réduit à un point. On dit que le **plan $\mathscr{P}$** est **tangent** à la sphère en **S** (*voir Fig. 3*).

► $\boxed{\text{lorsque } OH > R}$, le plan $\mathscr{P}$ ne coupe pas la sphère.

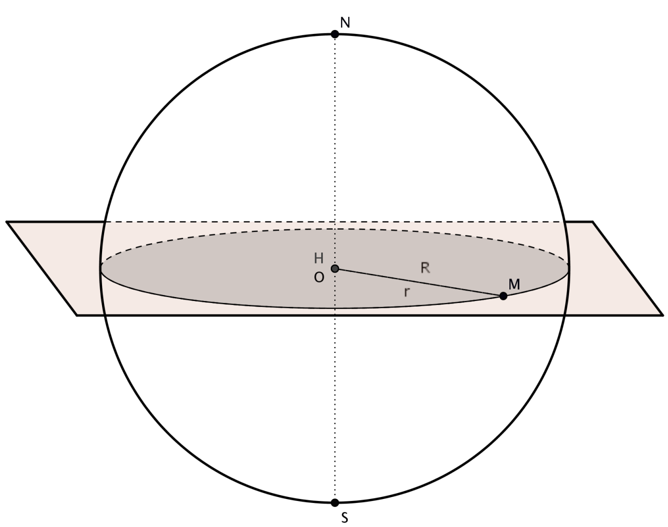


Fig. 2 : cas où $OH = 0$

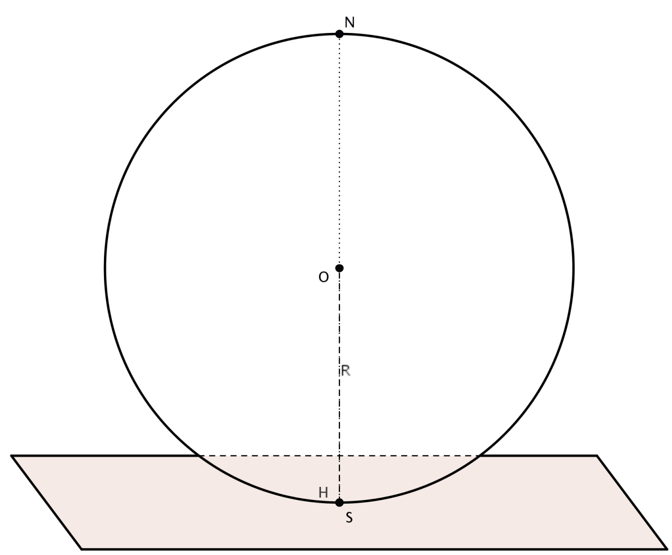
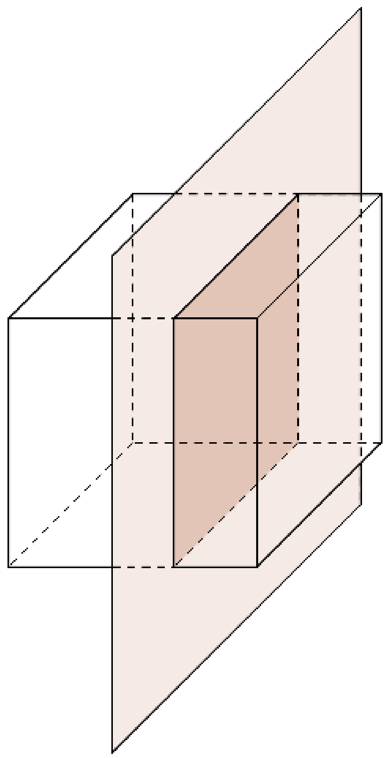


Fig. 3 : cas où $OH = R$

25.2 Section d’un cube, d’un pavé, d’un cylindre par un plan

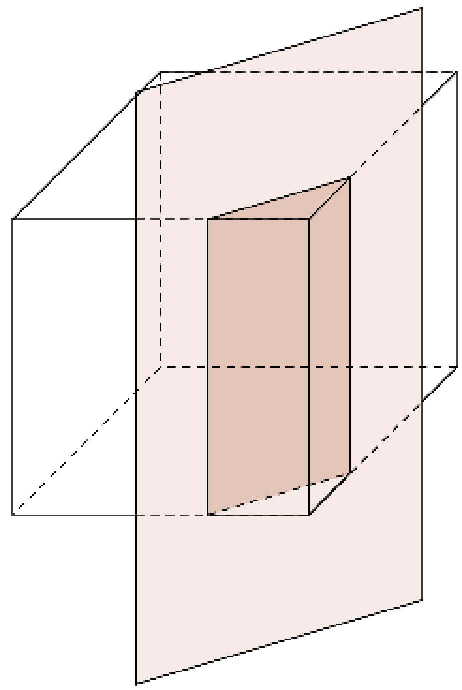
Propriété

La section d’un cube par un plan parallèle à une face est un **carré** :



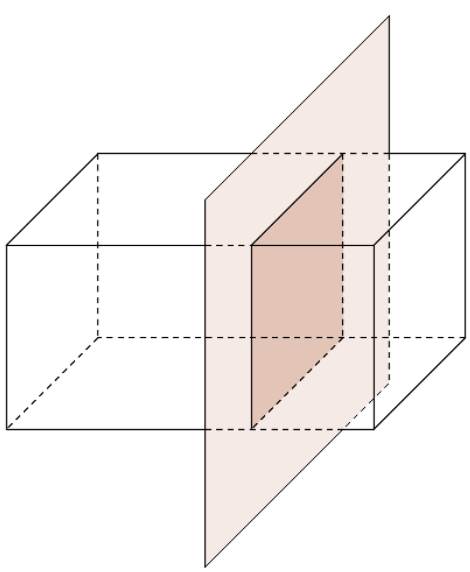
Propriété

La section d’un cube par un plan parallèle à une arête est un **rectangle** :



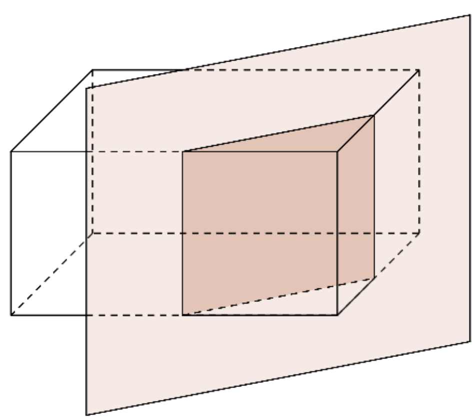
Propriété

La section d’un pavé par un plan parallèle à une face est un **rectangle** :



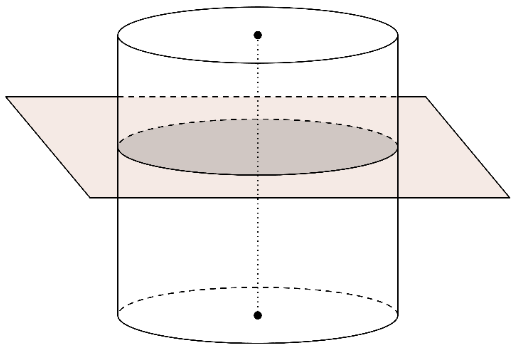
Propriété

La section d’un pavé par un plan parallèle à une arête est un **rectangle** :



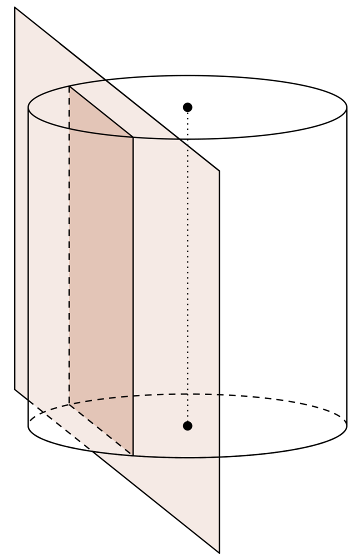
Propriété

La section d'un cylindre par un plan parallèle à la base est un **cercle** de même rayon que le cercle de base :



Propriété

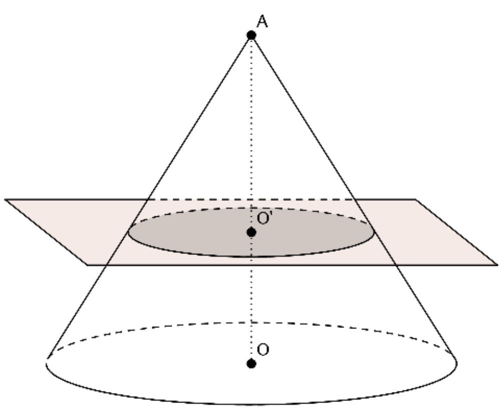
La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe est un **rectangle** :



25.3 Section d'une pyramide, d'un cône par un plan

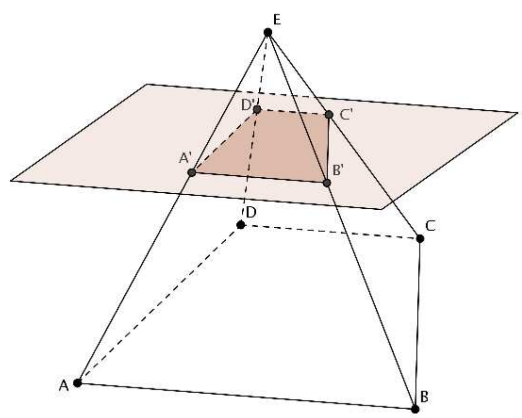
Propriété

La section d'un cône par un plan parallèle à la base est un **cercle** :



Ce cercle de section est une réduction du cercle de base ; le **coefficient de réduction** k est égal à $k = \frac{AO'}{AO}$.
Le rayon de ce cercle de section est alors égal à $k \times R$

Voici la section d'une pyramide par un plan parallèle à la base :



Le polygone de section $A'B'C'D'$ est une réduction du polygone de base $ABCD$; le **coefficient de réduction** k est égal à $k = \frac{EA'}{EA} = \frac{EB'}{EB} = \ldots$.
Les longueurs des côtés de ce polygone de section sont alors égales à celles des côtés du polygone de base, multipliées par k : $A'B' = k \times AB$, etc.