Chapitre 10

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

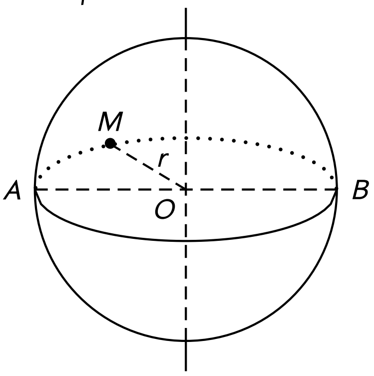
I – Sphères et boules

1. Définitions

Définitions

- **On appelle sphère de centre O et de rayon r, l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$.**
- **On appelle boule de centre O et de rayon r, l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leqslant r$.**

Exemple :



Les points A, B et M appartiennent à la sphère ci-contre, on peut donc affirmer que $OA = OB = r$

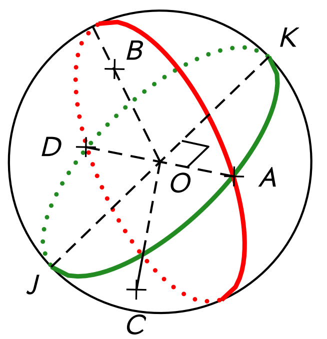
$[AB]$ est un diamètre de la sphère (il joint deux points de la sphère en passant par le centre)

*Un cercle qui a pour diamètre un diamètre de la sphère est appelé **grand cercle** de la sphère. Le cercle en vert est un grand cercle de la sphère.*

Remarque

La sphère est l'enveloppe de la boule comme la peau d'une orange.

■ EXERCICE :



La figure ci-contre représente une sphère de centre O et de rayon 5 cm. Les cercles rouge et vert sont des grands cercle de cette sphère. Ces deux cercles se coupent en A et D. $[JK]$ est un diamètre du cercle vert.

1. Quels points appartiennent à la sphère ?
2. Que vaut OK ? OJ ?
3. Que vaut la longueur AD.
4. Calculer la longueur des grands cercles.

Solution :

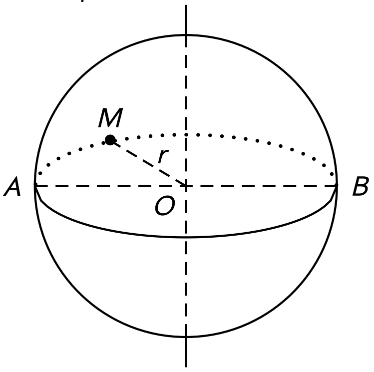
1. Les points A et D appartiennent aux grands cercle, donc ils appartiennent à la sphère.
   $[JK]$ est un diamètre d'un des grands cercles, donc J et K appartiennent à la sphère.
   Conclusion : on peut affirmer que les points A, D, J et K appartiennent à la sphère.
2. J et K appartiennent à la sphère qui a pour centre O et rayon 5 cm, donc $OJ = OK = 5$ cm.
3. A et D sont les points d'intersections de deux grands cercles de la sphère, donc $[AD]$ est un diamètre de la sphère.
   Conclusion : $AD = 2 \times 5 = 10$ cm.
4. $AD = 10$ cm est le diamètre du grand cercle vert, donc $\mathscr{P}_{\text{grand cercle}} = 2 \times \pi \times 5 = 10\pi \approx 31,4$ cm.

2. Aire et volume

Volume d'une boule

Le volume d'une boule se calcule grâce à la formule : $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$ où r est le rayon de la boule.

Exemple :



Donnée :
Boule de rayon $r = 5$ cm.

Question : *calculer le volume de la boule ci-contre.*

Réponse :

$$\mathscr{V}_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 \longleftarrow \text{ on applique la formule, ici le rayon vaut 5 cm}$$

$$\mathscr{V}_{boule} = \frac{500}{3} \times \pi \text{ cm}^3 \longleftarrow \text{ calcule } 4 \times 5^3\text{, au numérateur}$$

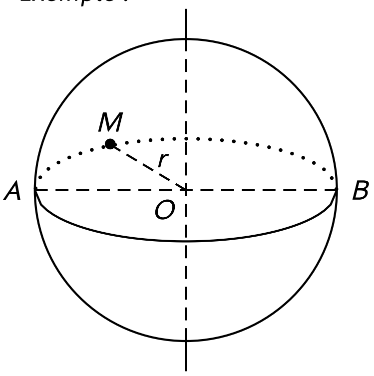
$$\mathscr{V}_{boule} \approx 524 \text{ cm}^3 \longleftarrow \text{ on calcule la valeur approchée demandée}$$

Oral : –	En classe : –	À la maison : 85 p. 253

Aire de la sphère

L'aire de la sphère se calcule grâce à la formule : $4 \times \pi \times r^2$ où r est le rayon de la sphère.

Exemple :



Donnée :
Boule de rayon $r = 6$ cm.

Question : *calculer le volume de la boule ci-contre*

Réponse :

$$\mathscr{A}_{sphère} = 4 \times \pi \times 6^2 \longleftarrow \text{ on applique la formule, ici le rayon vaut 6 cm}$$

$$\mathscr{A}_{sphère} = 248 \times \pi \text{ cm}^2 \longleftarrow \text{ on calcule } 4 \times 5^3$$

$$\mathscr{A}_{sphère} \approx 452 \text{ cm}^2 \longleftarrow \text{ on calcule la valeur approchée demandée}$$

II – Rappels : autres volumes

Formules

Volumes des solides *sans* pointe (prisme, pavé, cube ou cylindre) :

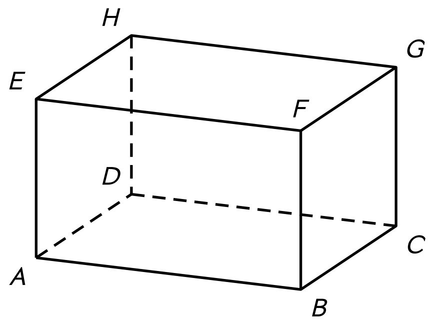
$$\mathscr{V} = \mathscr{B} \times h,$$

Volumes des solides *avec* pointe (cône ou pyramide) :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h,$$

où $\mathscr{B}$ désigne l'aire de la base du solide et h sa hauteur.

Exemple 1 :



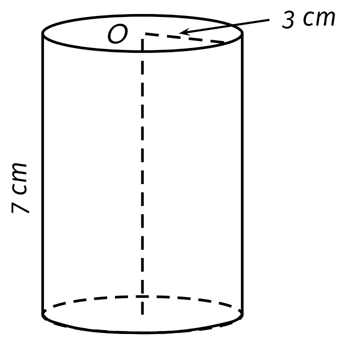
ABCDEFGH est un pavé tel que :
AB = 8 cm ; BC = 5 cm et GC = 3 cm.

Aire de la base :

$$\mathscr{A}_{ABCD} = 8 \times 5$$
$$\mathscr{A}_{ABCD} = 40\ cm^2$$

Volume de *ABCDEFGH* :

$$\mathscr{V}_{ABCDEFGH} = 40 \times 3$$
$$\mathscr{V}_{ABCDEFGH} = 120\ cm^3$$



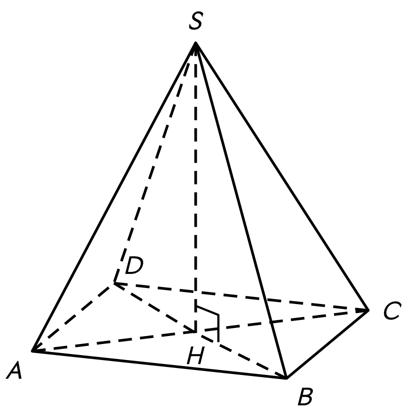
Aire du disque de base :

$$\mathscr{A}_{base} = \pi \times 3 \times 3$$
$$\mathscr{A}_{base} = 9\pi\ \ \mathrm{cm}^2$$

Volume du cylindre :

$$\mathscr{V}_{cylindre} = 9\pi \times 7$$
$$\mathscr{V}_{cylindre} = 63\pi\ cm^3$$
$$\mathscr{V}_{cylindre} \approx 198\ cm^3$$

Exemple 2 :



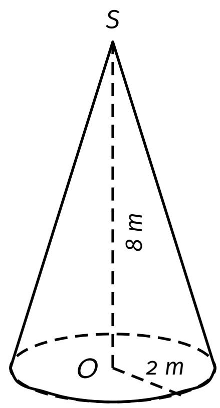
SABCD est une pyramide à base rectangulaire ABCD telle que :
- *AB = 6 cm et BC = 2, 5 cm,*
- *SH = 7 cm.*

Aire de la base :

$$\mathscr{A}_{ABCD} = 6 \times 2,5$$
$$\mathscr{A}_{ABCD} = 15\ \mathrm{cm}^2$$

Volume de la pyramide :

$$\mathscr{V}_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 15 \times 7$$
$$\mathscr{V}_{ABCDEF} = 35\ cm^3$$



Aire du disque de base :

$$\mathscr{A}_{base} = \pi \times 2 \times 2$$
$$\mathscr{A}_{base} = 4\pi\ m^2$$

Volume du cône :

$$\mathscr{V}_{cône} = \frac{1}{3} \times 4\pi \times 8$$
$$\mathscr{V}_{cône} = \frac{32}{3}\pi\ m^3$$
$$\mathscr{V}_{cône} \approx 33,5\ m^3$$

Oral :	**En classe :**	**À la maison :**
–	**80 p. 253**	**81, 82, 83, 84 p. 253**

III – Sections de solides

1. Section d'une sphère

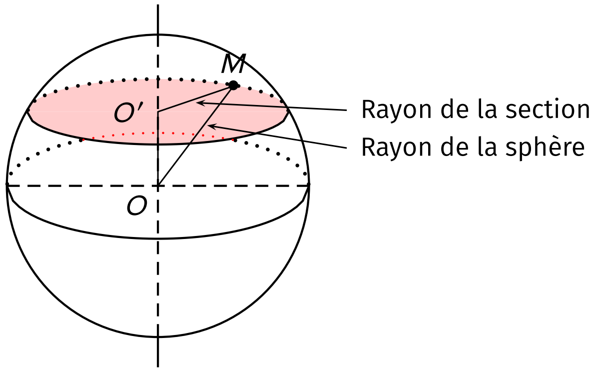
Définition

La section d'une sphère de centre O et de rayon r par un plan est un cercle de centre O' et de rayon r'.

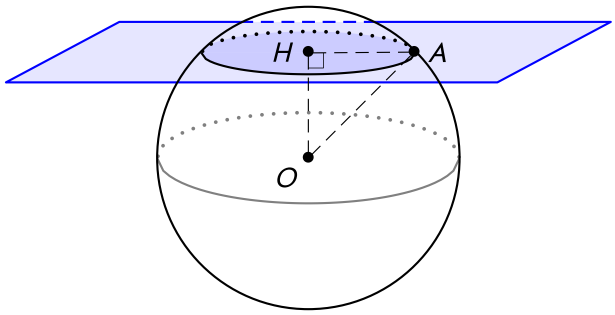
Propriété

(OO') est perpendiculaire au plan et $0 \leqslant r' \leqslant r$

Illustration



Exemple :



La sphère ci-contre est de centre O et de rayon $OA = 7$ cm. On coupe cette sphère par un plan à 4 cm de son centre, on note H le centre de la section obtenue.

1. *Quelle est la nature de la section ?*
2. *Calculer le rayon HA de cette section.*
3. *Calculer l'aire de cette section.*

Réponses :

1. *La section d'une sphère par un plan est un cercle, donc la section de cette sphère est un cercle de centre H et de rayon $[HA]$.*
2. *D'après la propriété précédente, (OH) et (AH) sont perpendiculaires.*
   OAH est un triangle rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} OA^2 &= OH^2 + HA^2 \\ HA^2 &= 7^2 - 4^2 \\ HA^2 &= 33 \\ HA &= \sqrt{33} \\ HA &\approx 5,7 \text{ cm} \end{aligned}$$

3. *$[HA]$ est un rayon de la section, on a donc :*

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{section} &= \pi \times 5,7^2 \\ \mathscr{A}_{section} &= 32,49\pi \;\; cm^2 \\ \mathscr{A}_{section} &\approx 102 \;\; cm^2 \end{aligned}$$

Oral : 8 p. 176	En classe : –	À la maison : –

2. Sections d'un pavé droit (ou d'un prisme)

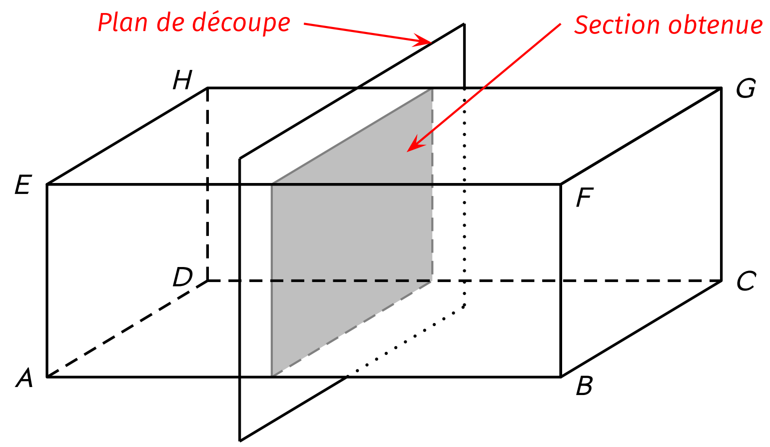
Définitions (rappels)

- **Un pavé droit (ou parallélépipède rectangle) est un solide dont les six faces sont des rectangles.**
- **Un cube est un solide dont les six faces sont des carrés.**

Propriété : section parallèle à une face (ou une base)

- La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est un rectangle. La section obtenue a donc les mêmes dimensions que cette face.
- La section d'un prisme droit par un plan parallèle à une base est de la même forme que la base, ainsi que la même dimension.

Exemple :

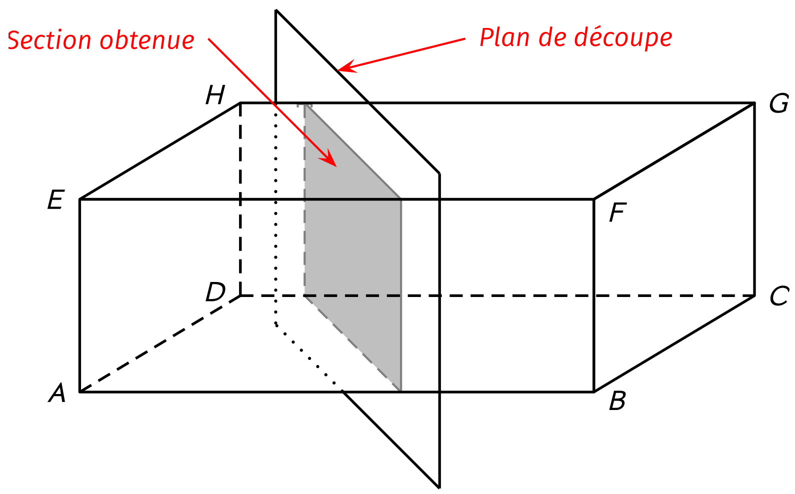


$ABCDEFGH$ est un pavé droit, donc la section par un plan parallèle à $ADHE$ en grise est un rectangle de même dimension que $ADHE$.

Propriété : section par un plan parallèle à une arête latérale

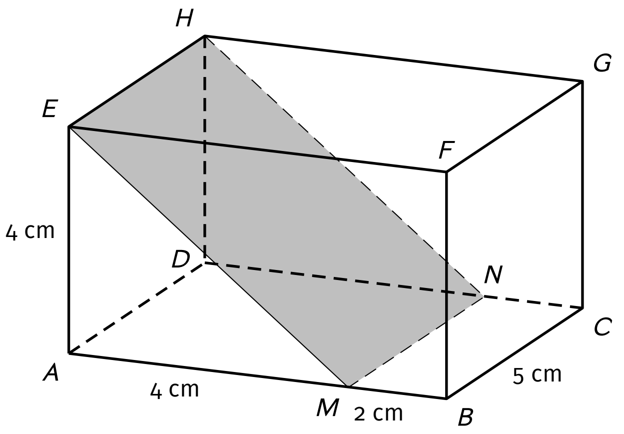
- La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une de ses arêtes est un rectangle. Les dimensions de la section obtenue se calculent en général avec le théorème de Pythagore.
- La section d'un prisme droit par un plan parallèle à une de ses arêtes latérales est également un rectangle. Sauf cas particulier, on ne demandera pas de calculer ses dimensions...

Exemple :



$ABCDEFGH$ est un pavé droit, donc la section par un plan parallèle à $[HD]$ en grise est un rectangle.

■ **EXERCICE :** Le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ ci-dessous a été coupé par un plan parallèle à l'arête $[BC]$. La section obtenue est le quadrilatère $EHNM$.



1. Quelle est la nature du quadrilatère $EHNM$?
2. Calculer la longueur EM. Donner la valeur exacte et l'arrondi au mm.
3. Dessiner la section $EHNM$ en vraie grandeur.
4. Calculer la volume du prisme droit $BMEFCNHG$.

Solution :

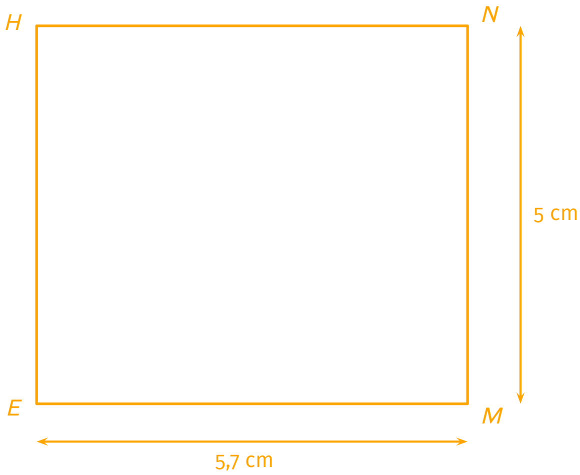
1. $ABCDEFGH$ est un pavé droit et la section $EHNM$ est obtenue après la coupe par un plan parallèle à $[BC]$, donc $EHNM$ est un rectangle.

2. $ABCDEFGH$ est un pavé droit et $EHNM$ est la section obtenue par une coupe parallèle à $[BC]$ donc EAM est un triangle rectangle en A.

   D : EAM est un triangle rectangle en A.
   P : Donc d'après le théorème de Pythagore, on a :
   C : $EM^2 = EA^2 + AM^2$
   $EM^2 = 4^2 + 4^2$
   $EM^2 = 32$
   $EM = \sqrt{32}$
   $EM \approx 5,7$ cm

   Conclusion : EM a pour valeur exacte $\sqrt{32}$ cm et comme valeur approchée 5,7 cm.

3. Les questions précédentes et l'énoncé nous donnent : $EMNH$ est un rectangle, $EM \approx 5,7$ cm et $EH = 5$ cm. La section en vraie grandeur est donc :d



4. On commence par calculer l'aire de la base $BMEF$:

$$\mathscr{A}_{BMEF} = \mathscr{A}_{BAEF} - \mathscr{A}_{AME} = (4+2) \times 4 - \frac{4 \times 4}{2} = 24 - 8 = 16 \text{ cm}^3.$$

On a alors :

$$\mathscr{V}_{BMEFCNHG} = \mathscr{A}_{BMEF} \times BC = 16 \times 5 = 80 \text{ cm}^3.$$

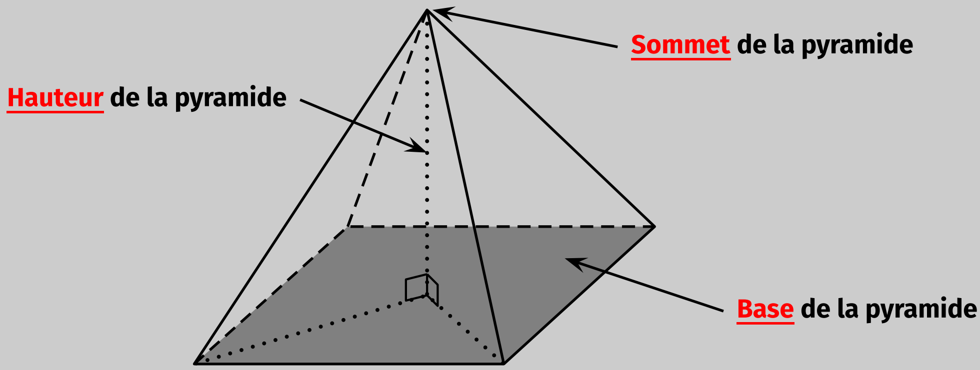
Oral : 6, 7, 9, 10, 12, 13 p. 176	**En classe :** 19a, 20a, 26 p. 177 + 27, 29 p. 178	**À la maison :** 19b, 20b p. 177 + 28, 30, 32 p. 178

IV – Section d'une pyramide (ou d'un cône)

Définitions

Une pyramide est un solide dont :

- **une face, la base, est un polygone qui ne contient pas le sommet de la pyramide ;**
- **les faces latérales sont des triangles qui ont un sommet commun : le sommet de la pyramide.**

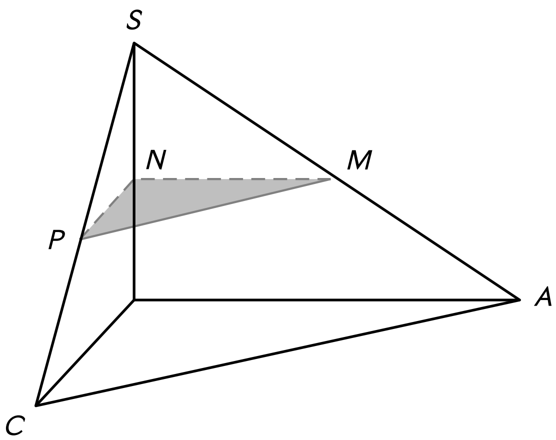


La hauteur est perpendiculaire à la base et passe par le sommet de la pyramide. Enfin, un cône (de révolution) est une sorte de pyramide dont la base est un disque (ce n'est pas un polygone, ce qui explique que le cône n'appartient pas à la famille des pyramides).

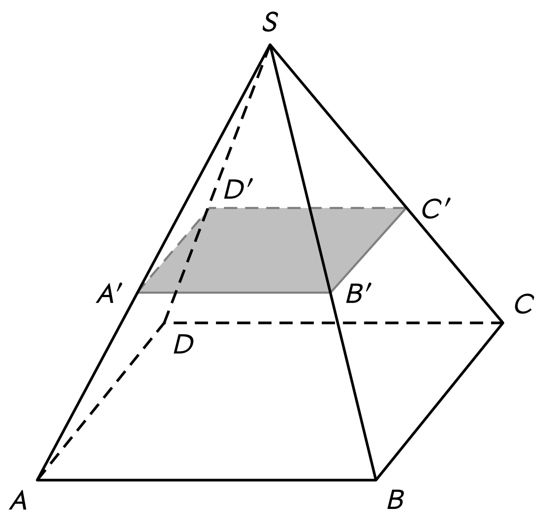
Propriété

La section d'une pyramide (ou d'un cône) par un plan parallèle à la base est une figure de la même forme que la base. La section obtenue est une réduction de la base.

Exemples :



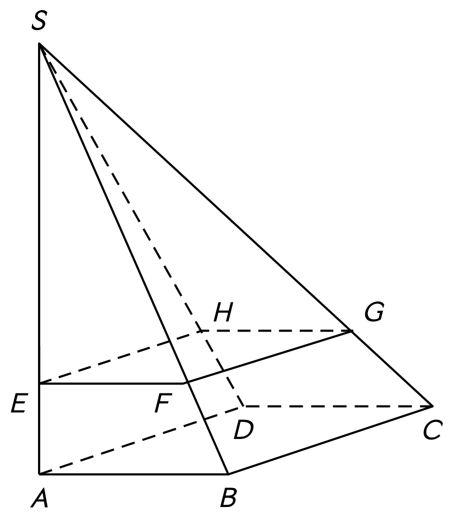
$SABC$ est une pyramide à base triangulaire.
MNP est la section de $SABC$ parallèlement à la base ABC.
Donc MNP est un triangle qui est une réduction de ABC.



$SABC$ est une pyramide à base rectangulaire.
$A'B'C'D'$ est la section de $SABCD$ par un plan parallèle à $ABCD$.
Donc $A'B'C'D'$ est un rectangle qui est une réduction de $ABCD$.

On va terminer ce chapitre par un exercice de type brevet.

■ Exercice (de brevet) :



$SABCD$ est une pyramide à base rectangulaire $ABCD$, de hauteur $[SA]$. On donne $SA = 15$ cm, $AB = 8$ cm et $BC = 11$ cm.

1. Calculer le volume V_1 de la pyramide SABCD.
2. Démontrer que SB = 17 cm.
3. On note E le point de $[SA]$ tel que $SE = 12$ cm et F le point de $[SB]$ tel que $SF = 13,6$ cm.
   On coupe cette pyramide par le plan passant par E et parallèle à la base de la pyramide. La pyramide $SEFGH$ ainsi obtenue, est une réduction de la pyramide $SABCD$.
   (a) Quelle est la nature de $EFGH$?
   (b) Quel est le coefficient de la réduction ?
   (c) En déduire le volume V_2 de la pyramide $SEFGH$.

Solution :

1. Calcul de l'aire de la base : $\mathscr{A}_{ABCD} = 8 \times 11 = 88$ cm^2.
   Calcul du volume de $SABCD$: $V_1 = \dfrac{1}{3} \times 88 \times 15 = 440$ cm^3.

2. $[SA]$ est la hauteur de $SABCD$ donc SAB est un triangle rectangle en A.
   D SAB est un triangle rectangle en A.
   P Donc d'après le théorème de Pythagore on a :
   C $SB^2 = SA^2 + AB^2$
   $SB^2 = 15^2 + 8^2$
   $SB^2 = 289$
   $SB = \sqrt{289}$
   $SB = 17$ cm

3. (a) $EFGH$ est un rectangle.
   (b) Le coefficient de réduction est $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{12}{15} = 0,8$.
   (c) On utilise le coefficient de réduction, donc le volume de $SEFGH$ est :

$$V_2 = 0,8^3 \times V_1 = 0,512 \times 440 = 225,28 \text{ cm}^3$$

Oral : 11, 14, 15 + 16, 17 p. 176	En classe : 2, 5 p. 175 + 38a, 39 p. 179	À la maison : 3, 4 p. 175 + 38b, 40, 41, 42 p. 179 + 43 p. 180

Tâche complexe : 78 p. 187 / Problème ouvert : 69 p. 184