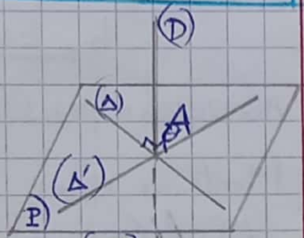
Chapitre ⑧ : Géométrie dans l'espace

I – Orthogonalité d'une droite et d'un plan :

1) Définition :

On dit qu'une droite (D) est perpendiculaire ou orthogonale à un plan (P) en un point A si elle est perpendiculaire au point A à deux droites incluses dans le plan (P) et sécantes en A.

*** figure géométrique**



* On a $(D) \perp (\Delta)$ et $(D) \perp (\Delta')$ au point A

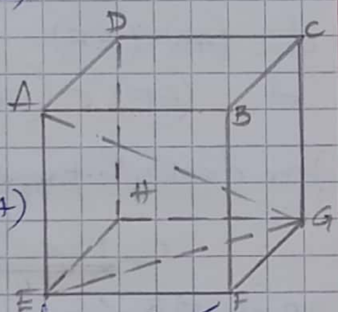
* (Δ) et (Δ') sont inclus dans (P)

alors $(D) \perp (P)$

*** Exemple :**

ABCDEFGH un cube

Montrons que $(AE) \perp (EFGH)$



On a ABEF et ADHF deux carrés

donc * $(AE) \perp (EH)$ en E

* $(AE) \perp (EF)$ en E

* (EF) et (EH) sont inclus dans le plan (EFGH) et se coupent en E

Alors d'après la définition $(AE) \perp (EFGH)$ en E

2) Propriété ① :

a – prop ① :

Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P) au point A, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites de (P) qui passent par A.

b – Exemple :

On considère le cube ABCDEFGH précédent

Montrons que le triangle AEG est rectangle en E.

On a $(AE) \perp (EFGH)$ en E

Comme la droite (EG) incluse dans le plan (EFGH) et passe par E

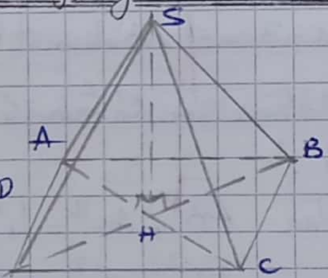
Donc d'après la prop ① : $(AE) \perp (EG)$

Cela signifie que le triangle AEG est rectangle en E

3) Théorème de Pythagore dans l'espace :

a – Théorème de Pythagore directe :

*** Exemple :**



La figure représente une pyramide régulière SABCD à base carré ABCD et de hauteur [SH] tel que :

$AC = BD = 12\,cm$ et $SH = 12\,cm$

Calculer BC et SC

⇒ Calcul de BC :

ABCD est un carré, donc le triangle ABC est rectangle en B

Donc d'après le théorème de Pythagore directe on a : $BC^2 + AB^2 = AC^2$

$BC^2 + BC^2 = AC^2$ (car $AB = BC$ ABCD carré)

$2BC^2 = AC^2$

$2 \times BC^2 = 12^2$

$BC^2 = \frac{144}{2} = 72$

$BC = \sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$

⇒ Calcul de SC :

On a [SH] hauteur de la pyramide SABCD

Donc $(SH) \perp (ABCD)$ en H

et $(HC) \subset (ABCD)$

Alors : $(SH) \perp (HC)$

donc le triangle SHC est rectangle en H

donc d'après le théorème de Pythagore direct :

$$SH^2 + HC^2 = SC^2$$

$$SC^2 = 12^2 + 6^2 \quad \text{car } HC = \frac{AC}{2}$$

$$SC^2 = 144 + 36$$

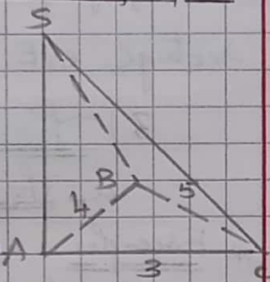
$$SC^2 = 180$$

$$SC = \sqrt{180} = \sqrt{6^2 \times 5}$$

Alors $SC = 6\sqrt{5}$

b_ Théorème de Pythagore réciproque :

* Exemple :



$SABC$ tétraèdre

à base le triangle ABC

telque :

$AC = 3\,cm$ et $AB = 4\,cm$ et $BC = 5\,cm$

Montrons que le triangle ABC est rectangle en A

On a $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

$BC^2 = 5^2 = 25$

Donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$

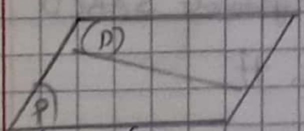
Alors d'après le théorème de Pythagore réciproque, le triangle ABC est rectangle en A.

II _ Parallélisme d'une droite et d'un plan :

1) Définition :

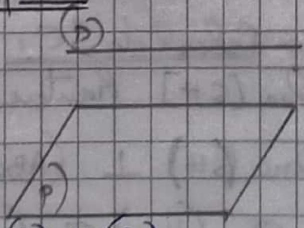
On dit qu'une droite (D) est parallèle à un plan (P) si (D) est incluse dans (P) ou si (D) et (P) n'ont aucun point commun.

* figure géométrique :



$(D) \subset (P)$

$\rightarrow (D) \,//\, (P)$



$(D) \,//\, (P)$

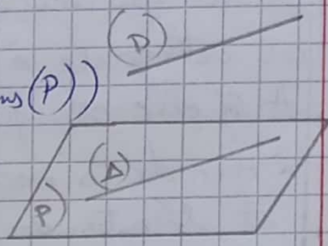
car aucun points communs

2) Propriété ② :

a _ propo ② :

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si elle est parallèle à une droite (Δ) incluse dans le plan (P).

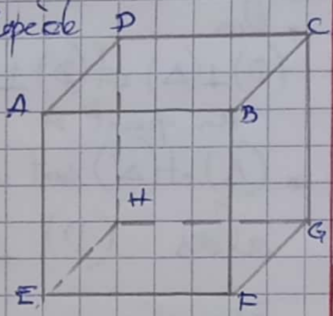
* Exemples :



$\begin{cases} * \ (\Delta) \subset (P) \ ((\Delta) \text{ inclus dans } (P)) \\ * \ (\Delta) \,//\, (D) \end{cases}$

alors $(D) \,//\, (P)$

b _ Exemple :



$ABCDEFGH$ parallélépipède

Montrons que :

$(AB) \,//\, (EFGH)$

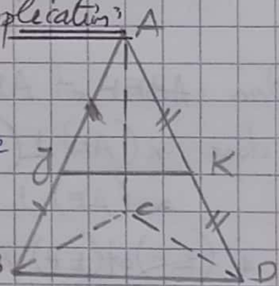
On a $ABEF$ rectangle

donc $(AB) \,//\, (EF)$

et $(EF) \subset (EFGH)$

Donc d'après la propo ② : $(AB) \,//\, (EFGH)$

c _ Exercice d'application :



$ABCD$ tétraèdre

J milieu de $[AB]$, K milieu de $[AD]$

Montrons que : $(JK) \,//\, (BCD)$

* Correction :

On considère le triangle ABD

On a $\begin{cases} * \ J \text{ milieu de } [AB] \\ * \ K \text{ milieu de } [AD] \end{cases}$

Donc d'après la propo de la droite passante par deux milieux

donc $(JK) \,//\, (BD)$

Comme $(BD) \subset (BCD)$

donc d'après la propo ②, on a :

$(JK) \,//\, (BCD)$

3) Théorème de Thalès dans l'espace

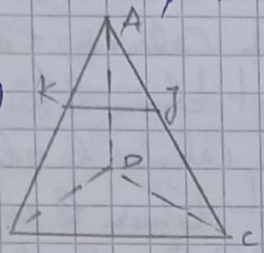
a - Propo directe :

* **Exemple :**

On considère la pyramide ABCD telque ; $(KJ) \parallel (BC)$

et $AK = 2$ et $AB = 6$ et $BC = 9$

Calculer KJ



On considère le triangle ABC

On a $\begin{cases} * \ K \in [AB] \\ * \ J \in [AC] \end{cases}$ telque : $(KJ) \parallel (BC)$

Donc d'après le théorème de Thalès directe,

on a : $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{KJ}{BC}$

$\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{KJ}{BC}$

$\dfrac{2}{6} = \dfrac{KJ}{9}$

$KJ = \dfrac{2 \times 9}{6} = \dfrac{18}{6}$

Alors : $KJ = 3$

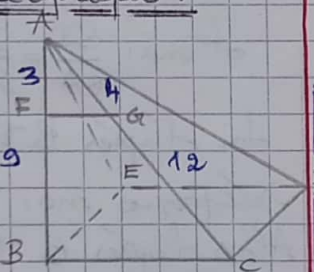
b - Propo réciproque :

On considère la figure

telque : $AF = 3$ et $AB = 9$

$AG = 4$ et $AC = 12$

Montrer que $(FG) \parallel (BC)$



On a :

* $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{AG}{AC} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

donc $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AG}{AC}$

On considère le triangle ABC

On a $\begin{cases} * \ F \in [AB] \text{ et les points } A, F \text{ et } B \text{ ont} \\ * \ G \in [AC] \text{ même ordre que les points } A, G \text{ et } C \end{cases}$

et on a $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AG}{AC}$

Donc d'après le théorème de Thalès réciproque on a $(FG) \parallel (BC)$

III - Agrandissement et réduction :

1) Définition :

On dit qu'une figure est un agrandissement ou une réduction d'une autre figure lorsque leurs longueurs sont proportionnelles de rapport k.
C-à-d on obtient le deuxième solide en multipliant les arêtes du premier par le nombre positif non nul k ($k \neq 1$)
k est appelé coefficient d'agrandissement ou de réduction.

2) Remarques importantes

* Si $k > 1$, il s'agit d'un agrandissement
* Si $0 < k < 1$, il s'agit d'une réduction.
* Si k est le coefficient d'agrandissement alors le rapport de réduction est $\dfrac{1}{k}$

3) L'influence de l'agrandissement ou la réduction sur les aires et les volumes.

a - propo ③ :

Dans un agrandissement ou une réduction dans l'espace de rapport k :

→ Les longueurs sont multipliées par k

→ Les aires sont multipliées par k^2

→ Les volumes sont multipliées par k^3

Autrement dit

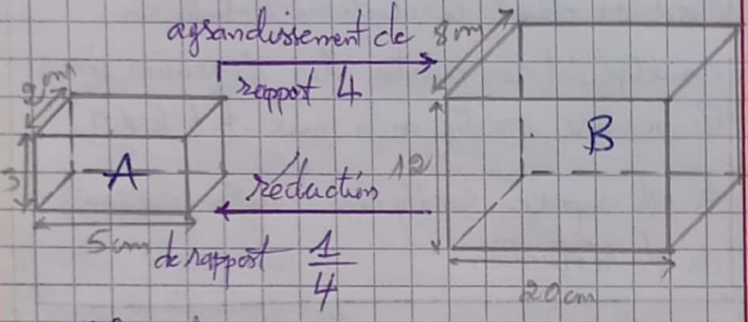
ℓ : longueur $\mathcal{A}$: aire V : volume.

Solide d'origine	Agrandissement ou réduction de rapport k →	Solide obtenu
ℓ	$\ell' = k \times \ell$	ℓ'
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}' = k^2 \times \mathcal{A}$	$\mathcal{A}'$
V	$V' = k^3 \times V$	V'

b- Exemples

Le parallélépipède B est agrandissement du parallélépipède A de rapport d'agrandissement est 4 (car les longueurs sont multipliés par 4)

→ et A est réduction de B de rapport $\frac{1}{4}$



* L'aire de A est :

$\mathcal{A} = 2(ab+ac+bc) = 2(5\times3 + 5\times2 + 3\times2)$
$= 2\times31$
$\mathcal{A} = 62\ cm^2$

Alors l'aire de B est :

$\mathcal{A}' = k^2 \times \mathcal{A} = 4^2 \times 62$
$\mathcal{A}' = 992\ cm^2$

* Le volume de A est :

$V = a\times b\times c = 5\times3\times2 = 30\ cm^3$

donc le volume de B est :

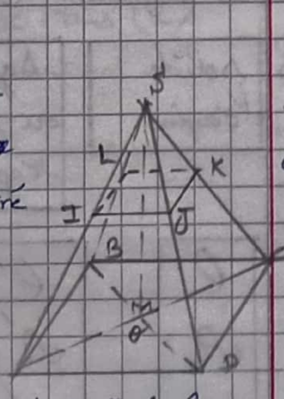
$V' = k^3 \times V = 4^3 \times 30 = 1920\ cm^3$

* Remarque :

Des fois, pour déterminer le rapport d'agrandissement ou de réduction, on emploie le théorème de Thalès direct.

4) Exercice d'application

La figure ci-dessous représente une pyramide régulière à base carré ABCD et de hauteur [SO] telque : BC = 6cm et SO = 4cm



I, J, K et L sont respectivement les milieux de [SA], [SB], [SC] et [SD] telque :

$SI = SJ = SK = SL = \frac{1}{3} SA$

1) Montrer que : $IJ = 2\ cm$

2) Sachant que la pyramide SABCD est un agrandissement du pyramide SIJKL

a- Déterminer son coefficient

b- Calculer l'air du carré ABCD et déduire l'air du carré IJKL

3) Calculer le volume du pyramide SABCD et déduire le volume du pyramide SIJKL

4) Déduire le volume V du solide ABCDIJKL

* Correction :

1) On a $SI = \frac{1}{3} SA$ donc $\frac{SI}{SA} = \frac{1}{3}$

et on a $SJ = \frac{1}{3} SA = \frac{1}{3} SD$ car $SA = SD$ car SABCD pyramide régulier

donc $\frac{SJ}{SD} = \frac{1}{3}$

Alors $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD} = \frac{1}{3}$

On considère le triangle ASD

On a $\begin{cases} * & I \in [AS] \\ * & J \in [DS] \end{cases}$ et les points A, I et S ont le même ordre des points D, J et S

et on a : $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD}$

donc d'après le théorème de Thalès réciproque on a : $(IJ) // (AD)$

Alors d'après le théorème de Thalès direct

On a : $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD} = \frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$

donc $\frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$ c.à.d $\frac{IJ}{6} = \frac{1}{3}$ $(AD = BC = 6cm)$

$IJ = \frac{1}{3} \times 6$

donc : $IJ = 2\ cm$

2) a- On a la pyramide SABCD est un agrandissement du pyramide SIJKL donc la base ABCD est un agrandissement de la base IJKL donc le coefficient d'agrandissement :

$k = \frac{AD}{IJ} = \frac{6}{2} = 3$

b- L'air du carré ABCD est :

$\mathcal{A} = AB^2 = 6^2 = 36\ cm^2$

et on a le carré IJKL est réduction du carré ABCD de rapport $\frac{1}{3}$

donc l'air du carré IJKL :

$\mathcal{A}' = k^2 \times \mathcal{A} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 36 = \frac{36}{9}$

$\mathcal{A} = 4\ cm^2$

3) Le volume du pyramide SABCD est :

$V = \frac{1}{3} \times SO \times AB^2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 6^2 = 48\ cm^3$

le pyramide SIJKL est réduction du pyramide SABCD de rapport $\frac{1}{3}$

donc le volume de SIJKL est :

$V' = k^3 \times V = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 48 = \frac{16}{9}\ cm^3$

4) V volume du solide ABCDJKLI

On a $V_{SABCD} = V + V_{SIJKL}$

$V = V_{SABCD} - V_{SIJKL}$

$= 48 - \frac{16}{9} = \frac{432 - 16}{9} = \frac{416}{9}$

$\boxed{V = \frac{416}{9}\ cm^3}$