REPÈRE DU PLAN

10

Objectifs d'apprentissage

- Connaître un repère orthonormé.
- Connaître les coordonnés d'un point / d'un vecteur.
- Calculer les coordonnés du milieu d'un segment.
- Calculer les coordonnés de la somme de deux vecteurs.
- Calculer les coordonnés du produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Calculer la distance entre deux points.
- Résoudre des problèmes géométriques en utilisant le repère et les coordonnées.

Prérequis

- Placer un point dans un repère.
- Déterminer les coordonnés d'un point.
- Calculer la distance entre deux points sur une droite graduée.
- Vecteurs et translation.

Gestion du temps

- 6 heures

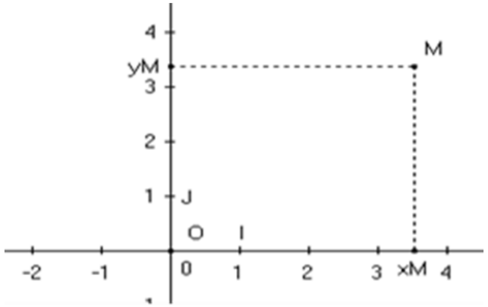
Outils didactiques

- Tableau.
- Livre scolaire.
- Compas, Equerre, Règle.

- **Pr :** Abdelilah BOUTAYEB
- **Niveau :** $3^{ème}$ APIC
- **Matière :** Mathématiques
- **Etablissement :** Collège Nahda

Activités

Activité 1 : 1) Recopie et complète les phrases suivantes :



- (O ; I ; J) est appelé………
- O est ………………………
- **(OI)** est appelé …………..
- **(OJ)** est appelé …………..
- x_M est appelé ……………
- y_M est appelé ……………
- Le couple $(x_M\ ;\ y_M)$ s'appelle …………………

2) Détermine les coordonnées des points : O et I et J.

3) Dans un repère (O ;I,J) Place les points :

$A(1\ ;-2)$; $B(-3\ ;4)$

$D(4\ ;0)$; $C(0\ ;-5)$

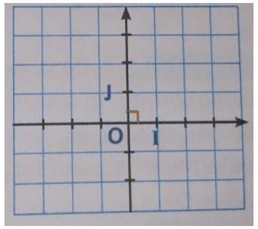
Contenu de la leçon

I- Coordonnées d'un point dans un repère du plan :

1) Repère du plan :

*** Définition :** Deux axes gradués et sécantes (OI) et (OJ) forment ce qu'on appelle ***un repère du plan***.

- Le point *O* est *l'origine* du repère (O, I, J).
- La droite (OI) est *l'axe des abscisses*.
- La droite (OJ) est *l'axe des ordonnés*.



*** Remarque :** Un repère est dit :

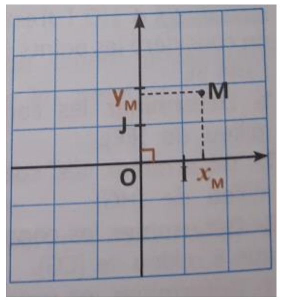
- *Orthogonal* si $(OI) \perp (OJ)$
- *Orthonormé* si $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$.

2) Coordonnés d'un point :

*** Définition :** Soit (O, I, J) un repère orthonormé.

A tout point *M* du plan, on associe un unique couple $(x_M,\ y_M)$ de nombres réels appelé *couple de coordonnés* du point M dans le repère.

Avec : $\begin{cases} x_M \text{ est appelé } abscisse \text{ du point } M \\ y_M \text{ est appelé } ordonné \text{ du point } M \end{cases}$



*** Exemples :** Soit (O, I, J) un repère orthonormé.

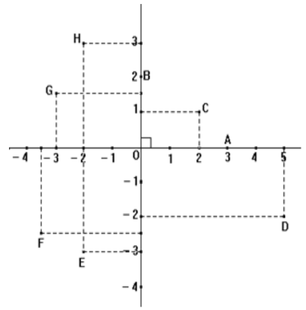
Placer les points suivants : $A(2{,}4)$; $B(-2{,}1)$; $C(-4,-2)$ et $D(3,-4)$.

Evaluation

Exercice 1 : (O, I, J) est un repère orthonormé.

Placer les points suivants : $A(-2,-3)$ $B(-3{,}1)$; $C\left(\frac{1}{2},-2\right)$; $D(0{,}2)$; $E(-3{,}0)$

Exercice 2 : Dans le repère ci-dessous, on a placé les points A, B, C, D, E, F, G et H.



Ecrire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.

Exercice 3 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : A(-4,3) ; B(0,1) ; C(7,3) et D(4,5).

1) Déterminer les coordonnés du point M le milieu de [AB].

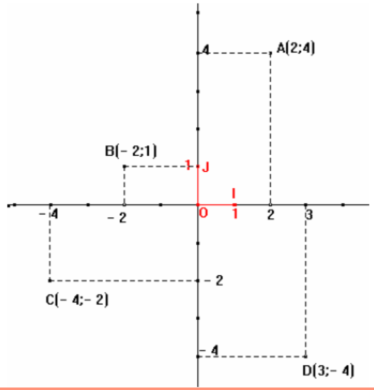
2) Déterminer les coordonnés du point N le milieu de [CD].

3) Déterminer les coordonnés du point E tel que A le milieu de [EC].

4) Déterminer les coordonnés du point F tel que N soit le symétrique de F par rapport à M.

Activités

Contenu de la leçon



*** Remarque :** - Si (O,I,J) un repère orthonormé, alors : $O(0,0)$; $I(1,0)\ et\ J(0,1)$.

- Si $M \in (OI)$ alors : $M(x_M, 0)$.
- Si $M \in (OJ)$ alors : $M(0, y_M)$.

3) Coordonnés du milieu d'un segment :

*** Propriété :** Dans un repère orthonormé (O,I,J) soient les points $A(x_A, y_A)\ et\ B(x_B, y_B)$ et M le *milieu* du segment $[AB]$.

Le couple de coordonnés du point M est : $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$.

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O,I,J), soient les points $A(2,3)\ et\ B(-2,1)$.

Déterminer le couple de coordonnés du point E le milieu de $[AB]$.

➔ * $x_E = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$

* $y_E = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Alors : $E(0,2)$

II- Coordonnées d'un vecteur :

1) Coordonnés d'un vecteur :

Evaluation

Exercice 4 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : $A(2,-4)$; $B(-4{,}5)\ et\ M(-1,\frac{1}{2})$.

Montrer que A est le symétrique de B par rapport à M.

Exercice 5 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : A(-5,2) ; B(-1,-1) ; C(3,1) et D(2,-3).

Déterminer les coordonnés des vecteurs suivants :$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{CA}$.

Exercice 6 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points A, B et M tel que M le milieu de [AB].

Déterminer dans chaque cas les coordonnés du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et celles du point M.

1) A(-4,-3) et B(1,5 ; 4)

2) A(0,3) et B(-2,5)

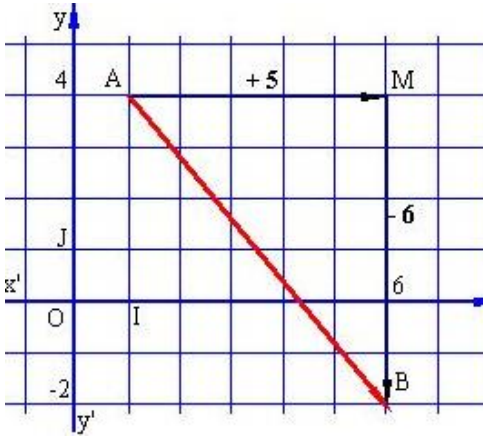
Exercice 7 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : A(3,7) ; B(-2,4) et C(-3,-2).

Déterminer les coordonnés du point D tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Activités	Contenu de la leçon	Evaluation

Activité 2 : Soit les points A(1;4) et B(6;-2).

Les coordonnées de vecteur d'origine A et d'extrémité B expriment les déplacements qu'il faut effectuer pour aller de A à B, **en suivant des chemins parallèles aux axes**.



D'où : $\overrightarrow{AB}(5\,;-6)$

1) Calcule $x_B - x_A$ puis $y_B - y_A$

2) Que peut-on déduire ?

3) Calcule Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{JB}$; $\overrightarrow{OA}$

*** Propriété :** Dans un repère orthonormé (O,I,J) soient les points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$.

Le couple de coordonnés du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O,I,J), soient les points $A(4{,}2)$ et $B(3,-1)$.

Déterminer les coordonnés du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

➔ On a : $\begin{cases} x_B - x_A = 3 - 4 = -1 \\ y_B - y_A = -1 - 2 = -3 \end{cases}$ alors : $\overrightarrow{AB}(-1,-3)$.

2) Vecteurs égaux :

*** Propriété :** Dans un repère orthonormé (O,I,J) soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que : $\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O,I,J), soient les points $A(3{,}3), B(1,-4)$ et $C(-2,-2)$.

Déterminer les coordonnés du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

➔ $ABCD$ un parallélogramme signifie que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Donc : $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$, signifie : $\begin{cases} 1 - 3 = -2 - x_D \\ -4 - 3 = -2 - y_D \end{cases}$

signifie : $\begin{cases} -2 = -2 - x_D \\ -7 = -2 - y_D \end{cases}$, signifie : $\begin{cases} x_D = -2 + 2 \\ y_D = -2 + 7 \end{cases}$, alors : $\begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 5 \end{cases}$

D'où : $D(0{,}5)$.

3) Règles de calcul :

Exercice 8 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : A(4,1) ; B(0,4) ; C(-3,-2) et D(1,-5).

1) Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2) Déterminer les coordonnés du point O le centre du parallélogramme ABCD.

Exercice 9 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : A(3,2) ; B(1,-6) ; C(-4,-1) et D(-2,2).

1) Déterminer les coordonnés du vecteur $\overrightarrow{EF}$ tel que : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

2) Déterminer les coordonnés du vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que : $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{EF}$.

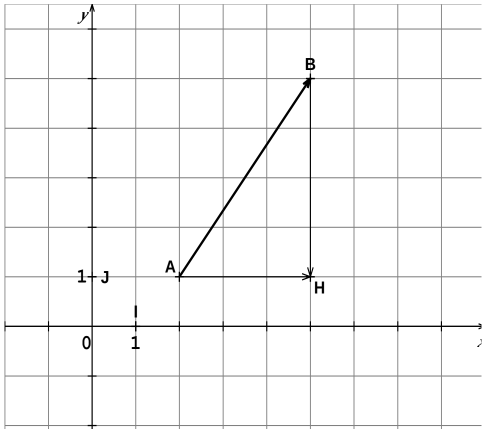
Exercice 10 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points A, B, C et D tel que : $\overrightarrow{AB}(2{,}3)$; C(-1,-5) et D(3,1).

Calculer les distances : OC ; AB ; CD.

Exercice 11 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : A(-1,2) ; B(-3,6) et C(-7,-1).

Activités

Activité 3 : On considère la figure suivante :



1) Vérifier que : $AH = xB - xA$ et $BH = yB - yA$

2) Quelle est la nature du triangle ABH?

3) Montrer que :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Contenu de la leçon

*** Propriété :** Soient $\overrightarrow{AB}(x, y)$ et $\overrightarrow{CD}(x', y')$ deux vecteurs et K un nombre réel, alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}(x + x', y + y')$ et $k\overrightarrow{AB}(kx, ky)$

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O, I, J), soient $\overrightarrow{AB}(2,3)$ et $\overrightarrow{CD}(-1,5)$.

1) Déterminer les coordonnés du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

2) Déterminer les coordonnés du vecteur $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

➔ 1) On a $\overrightarrow{AB}(2,3)$ et $\overrightarrow{CD}(-1,5)$ alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}(2 + (-1), 3 + 5)$

Donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}(1,8)$.

2) On a $\overrightarrow{AB}(2,3)$, donc : $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}(\frac{1}{3} \times 2, \frac{1}{3} \times 3)$, alors : $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}(\frac{2}{3}, 1)$.

III- Distance entre deux points dans un repère orthonormé :

*** Propriété :** Si dans un repère orthonormé, on a : $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, alors la distance entre les points A et B est donné par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O, I, J), soient les points $A(3, -2)$ et $B(5, -1)$.

Calculer la distance AB.

➔ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5 - 3)^2 + (-1 - (-2))^2}$

$= \sqrt{2^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{4 + 1^2} = \sqrt{5}$

*** Remarque :** Si dans un repère orthonormé on a : $\overrightarrow{AB}(x, y)$, alors la distance AB est donné par : $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$.

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O, I, J), on a $\overrightarrow{AB}(-3,5)$, alors: $AB = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

Evaluation

1) Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

2) En déduire que ABC est un triangle rectangle.

Exercice 12 : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points suivants : A(4,-2) ; B(2,0) et C(6,2).

1) Construis les points A, B et C.

2) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

Exercice 13 : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Construis les points : A(2,-4) ; B(3,4) ; C(-1,3) ; D(-2,-2) ; E(0,-3) et F(2,0).

2) Déterminer les coordonnés du point M le milieu de [AC].

3) Déterminer les coordonnés du point N tel que F le milieu de [DN].

4) Montrer que : $\overrightarrow{AB}(1,8)$.

5) Calculer AB et DC.

6) Déterminer les coordonnés du point K l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

7) Déterminer les coordonnés du point R tel que : $\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BE}$.