Chapitre ③ : Le repère dans le plan

I - Les coordonnées d'un point :

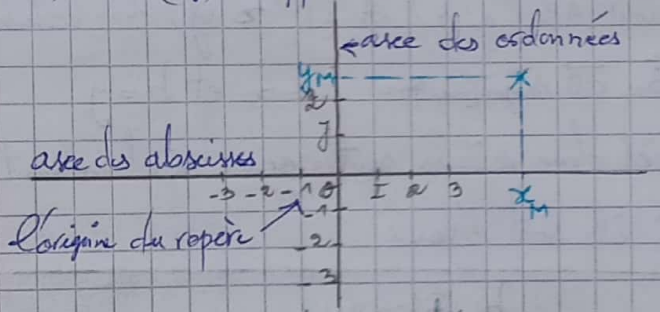
1) Repère orthonormé du plan :

O, I et J trois points du plan tel que :
$(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ = 1$

* Le repère (O, I, J) s'appelle repère orthonormé.

On dit que le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J)

* Le point O est appelé : l'origine du repère
* La droite (OI) est appelé : l'axe des abscisses
* La droite (OJ) est appelé : l'axe des ordonnées.



2) Les coordonnées d'un point :

a - Définition :

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, pour tout point M, il existe un couple unique de nombres réels $(x_M ; y_M)$ appelé couple de coordonnées du point M

x_M : est appelé l'abscisse de M

y_M : est appelé l'ordonnée de M

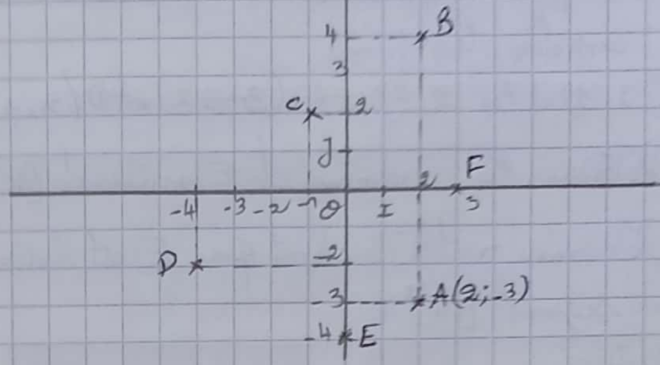
et on écrit : $M(x_M ; y_M)$

b - Exemple :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Plaçons les points :

$A(2 ; -3)$; $B(2 ; 4)$; $C(-1 ; 2)$

$D(-4 ; -2)$; $E(0 ; -4)$; $F(3, 0)$



c - Remarques importantes :

* (O, I, J) un repère orthonormé, donc $O(0 ; 0)$ et $I(1 ; 0)$ et $J(0 ; 1)$
* Si M est un point de l'axe des abscisses donc $y_M = 0$ et on écrit $M(x_M ; 0)$
* Si M est un point de l'axe des ordonnées donc $x_M = 0$ et on écrit $M(0 ; y_M)$

3) Les coordonnées du milieu d'un segment

a - Définition :

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan.
Si M est le milieu du segment $[AB]$, alors

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

et on écrit : $M\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

b - Exemple :

Soient $A(-2 ; 6)$ et $B(4 ; -8)$
Déterminons les coordonnées du point E milieu du segment $[AB]$

On a :
$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + (-8)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

donc $E(1 ; -1)$

c – Exercice d'application :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé on considère les points :

$A(-2;1)$ et $B(2;2)$ et $C(3;-2)$ et $D(x;y)$

1) Déterminer les coordonnées de E milieu de $[AC]$

2) Déterminer x et y sachant que E est milieu du segment $[BD]$

Solution :

1) E milieu du segment $[AC]$

donc $E\left(\frac{-2+3}{2};\frac{1+(-2)}{2}\right)$

Alors : $E\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right)$

2) E milieu du segment $[BD]$

donc $\begin{cases} x_E = \frac{x_B+x_D}{2} \\ y_E = \frac{y_B+y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{2+x}{2} \\ -\frac{1}{2} = \frac{2+y}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1-2 = -1 \\ y = -1-2 = -3 \end{cases}$

Alors : $\boxed{D(-1;-3)}$

II – Les coordonnées d'un vecteur :

1) Les coordonnées d'un vecteur :

a – Définition :

Dans un repère orthonormé (O,I,J), Soit les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

x_B-x_A et y_B-y_A

et on écrit : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$

b – Exemples :

Soient $A(2;3)$ et $B(-1;-4)$ et $C(3;2)$

* Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

On a $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$

$\overrightarrow{AB}(-1-2;-4-3)$

$\overrightarrow{AB}(-3;-7)$

* Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A;y_C-y_A)$

$\overrightarrow{AC}(3-2;2-3)$

$\overrightarrow{AC}(1;-1)$

* Les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE}(1;1)$

On a $\overrightarrow{AE}(x_E-x_A, y_E-y_A)$

$\overrightarrow{AE}(x_E-2;y_E-3)$

Comme $\overrightarrow{AE}(1;1)$

donc $\begin{cases} x_E-2=1 \\ y_E-3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_E = 1+2 = 3 \\ y_E = 1+3 = 4 \end{cases}$

Alors : $E(3;4)$

2) Egalité de deux vecteurs :

a – propo ① :

Soient $\overrightarrow{AB}(a;b)$ et $\overrightarrow{CD}(x;y)$ deux vecteurs

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que : $a=x$ et $b=y$

c.à.d deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils sont égaux.

b – Exemples

Soient $A(2;3)$; $B(-2;4)$; $C(-1;2)$ et $D(3;1)$

Comparons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

On a

$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A) \\ \overrightarrow{DC}(x_C-x_D;y_C-y_D) \end{cases}$

$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(-2-2;4-3) \\ \overrightarrow{DC}(-1-3;2-1) \end{cases}$

$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(-4;1) \\ \overrightarrow{DC}(-4;1) \end{cases}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$

c – Exercice d'application :

On considère les points $A(2;-2)$ $B(4;-1)$; $C(-6;-2)$

Déterminer le couple des coordonnées du point D tel que $ABCD$ est parallélogramme.

Solution:

ABCD parallélogramme signifie que $\vec{AB} = \vec{DC}$

signifie que $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$

càd $\begin{cases} 4 - 2 = -6 - x_D \\ -1 + 2 = -2 - y_D \end{cases}$

càd $\begin{cases} x_D = -6 - 2 = -8 \\ y_D = -2 - 1 = -3 \end{cases}$

D'où $\boxed{D(-8;-3)}$

3) Coordonnées de la somme et différence de deux vecteurs :

a - propo ②:

On considère les vecteurs $\vec{AB}(a,b)$ et $\vec{CD}(x,y)$

On a : $\begin{cases} \vec{AB} + \vec{CD}\,(a+x\,;\,b+y) \\ \vec{AB} - \vec{CD}\,(a-x\,;\,b-y) \end{cases}$

b - Exemples

Soient $\vec{AB}\,(3;-1)$ et $\vec{CD}\,(2;-4)$

On a $*\ \vec{AB} + \vec{CD}\,(3+2\,;\,-1+(-4))$

$\vec{AB} + \vec{CD}\,(5\,;\,-5)$

$*\ \vec{AB} - \vec{CD}\,(3-2\,;\,-1-(-4))$

$\vec{AB} - \vec{CD}\,(1\,;\,3)$

c - Exercice d'application :

On considère les points $A(2;-1)$ et $B(3;5)$ $D(-3;7)$ et $C(x,y)$ et $M(-7;21)$

1) Déterminer x et y sachant que $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

2) Montrer que $\vec{DM} = \vec{AB} + \vec{AD}$

Solution:

1) On a $\vec{AB}\,(3-2\,;\,5-(-1))$

donc $\vec{AB}\,(1\,;\,6)$

on a $\vec{AD}\,(-3-2\,;\,7-(-1))$

donc: $\vec{AD}\,(-5\,;\,8)$

donc $\vec{AB} + \vec{AD}\,(1+(-5)\,;\,6+8)$

$\vec{AB} + \vec{AD}\,(-4\,;\,14)$

et on a $\vec{AC}\,(x-2\,;\,y+1)$

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ signifie que $\begin{cases} x-2 = -4 \\ y+1 = 14 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = -4+2 = -2 \\ y = 14-1 = 13 \end{cases}$

Alors: $C(-2;13)$

2) On a $\vec{DM}\,(x_M - x_D\,;\,y_M - y_D)$

$\vec{DM}\,(-7+3\,;\,21-7)$

donc $\vec{DM}\,(-4\,;\,14)$

et on a : $\vec{AB} + \vec{AD}\,(-4\,;\,14)$

Alors: $\boxed{\vec{DM} = \vec{AB} + \vec{AD}}$

4) Les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel :

a - propo ③:

Si $\vec{AB}(a,b)$ un vecteur et k un nombre réel, alors;

$k \times \vec{AB}\,(ka\,;\,kb)$

b - Exemple:

On considère le vecteur $\vec{AB}\,(3\,;\,-1)$

On a: $2\vec{AB}\,(2\times3\,;\,2\times(-1))$

donc : $2\vec{AB}\,(6\,;\,-2)$

et on a : $-4\vec{AB}\,(-4\times3\,;\,-4\times(-1))$

donc : $-4\vec{AB}\,(-12\,;\,4)$

c - Exercice d'application:

On considère les points $A(2;-1)$ et $B(3;5)$ et $C(4;11)$

Montrer que les points A, B et C sont alignés

* Solution: Pour montrer que les points A, B et C sont alignés, on montre que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires càd $\vec{AC} = k\vec{AB}$

On a $\vec{AB}\,(3-2\,;\,5-(-1))$

donc $\vec{AB}\,(1\,;\,6)$

on a $\vec{AC}\,(4-2\,;\,11-(-1))$

$\vec{AC}\,(2\,;\,12)$

On a $2\vec{AB}\,(2\,;\,12)$

Donc $\vec{AC} = 2\vec{AB}$

D'où les points A, B et C sont alignés.

III. La distance entre deux points :

1) Propo ④ :

Dans un repère orthonormé, si on a :
$A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$
Alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

* Remarque importante :
Si $\vec{AB}(x, y)$ alors : $\boxed{AB = \sqrt{x^2 + y^2}}$

2) Exemple :

Soient $\vec{AB}(3 ; 4)$ et $E(3 ; 1)$ et $F(0 ; -2)$ deux points du plan rapporté à un repère orthonormé.

Calculer AB et EF

* Calcul de AB
On a $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$
D'où : $\boxed{AB = 5}$

* Calcule de EF :
→ Méthode ① : propo ④ :
On a : $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$
$= \sqrt{(0-3)^2 + (-2-1)^2}$
$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$
D'où : $\boxed{EF = 3\sqrt{2}}$

→ Méthode ② : passage par $\vec{EF}$
On a $\vec{EF}(0-3 ; -2-1)$
$\vec{EF}(-3 ; -3)$
Donc $EF = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$
$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$
$\boxed{EF = 3\sqrt{2}}$

3) Exercice d'application :

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1 ; 5)$, $B(3 ; 9)$, $C(11 ; 5)$ et $D(9 ; 1)$.

Montrer que ABCD est un rectangle.

Solution :

* On a $\vec{AB}(3-1 ; 9-5)$
$\vec{AB}(2 ; 4)$
et $\vec{DC}(11-9 ; 5-1)$
$\vec{DC}(2 ; 4)$
donc $\vec{AB} = \vec{DC}$ c.à.d ABCD est parallélogramme

Montrons que ABC est un triangle rectangle en B

On a $\vec{BC}(11-3 ; 5-9)$
$\vec{BC}(8 ; -4)$
et $\vec{AC}(11-1 ; 5-5)$
donc : $\vec{AC}(10 ; 0)$

On a : $\begin{cases} AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ AC = \sqrt{10^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10 \\ BC = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \end{cases}$

On a $AB^2 + BC^2 = \sqrt{20}^2 + \sqrt{80}^2 = 20 + 80 = 100$

donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Alors ABCD est rectangle.